HYDRODYNAMISCHE UNTERSUCHUNGEN:

TURBULENZ BEI EINEM FLUSSE.
ÜBER SCHIFFSWELLEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KGL. BAYR. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
ZU MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

LUDWIG HOPF.

MÜNCHEN IM JULI 1909.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1910.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

MEINEN LIEBEN ELTERN

GEWIDMET.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545816_0009

Turbulenz bei einem Flusse.

§ 1. Das Turbulenzproblem.

Vielleicht in keinem anderen Zweige der Physik sind Theorie und Praxis einander so fremd geblieben wie in der Hydrodynamik; und das ist besonders seltsam und bedauerlich, da doch beide zu sehr umfangreichen und wichtigen Gebieten angewachsen sind. Allein der hydrodynamischen Theorie stellten sich einerseits bei Behandlung von Vorgängen in wirklichen Flüssigkeiten unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten entgegen; anderseits eröffnete sich ihr bei Umgehung dieser Schwierigkeiten durch Idealisierung in den reibungs- und wirbellosen Flüssigkeiten ein leicht zugängliches und dankbares Gebiet. Die Technik wuchs natürlich ganz unabhängig von diesen Theorien auf und schuf sich ihre mathematischen Fundamente selbst, mit allen Vorzügen und Nachteilen empirischer Formeln. In neuester Zeit ist das Bedürfnis nach einer Umgestaltung dieser Verhältnisse vielfach rege geworden, und man hat den wirklichen Flüssigkeitsproblemen eine größere Aufmerksamkeit zugewendet.

Ist nun unser Lehrgebäude der Hydrodynamik überhaupt richtig fundiert zur Behandlung solcher Probleme? Diese Frage ist durchaus nicht müßig. Gewiß hat das ohne jede Vernachlässigung gelöste Problem der Strömung, z. B. in einer Röhre, im Laboratorium sehr gut bestätigt werden können. Aber gerade da kann die Kritik und der Zweifel einsetzen; denn bei größeren Verhältnissen, wie bei Wasserleitungen usw., sind die so gut fundierten Formeln durchaus nicht mehr anwendbar; es treten dann nämlich an Stelle der einfach laminaren Strömung sogenannte turbulente Bewegungen, welche der Strömung einen wirbeligen, unregelmäßigen Charakter geben, und es erwächst die Frage, ob unsere Hydrodynamik auch über diese Unstimmigkeiten Rechenschaft abzulegen vermag.

Das Strömungsproblem ist in der Tat das dringlichste und interessanteste der hydrodynamischen Probleme, gerade weil es in gewissen Fällen vollkommen und befriedigend gelöst werden kann. Es ist das große Verdienst von Osborne Reynolds, die Gültigkeitsgrenzen dieser Lösung und den Weg zur Erklärung der Grenzen aus der hydrodynamischen Theorie heraus aufgezeigt zu haben.[1])

Reynolds stellte sich auf den Standpunkt, daß die hydrodynamischen Gleichungen durchaus und für alle Fälle Gültigkeit besitzen, daß darum die — im Fall einer kreisrunden Röhre als Poiseuillesches Gesetz bekannte — Lösung dieser Gleichungen immer eine mögliche Strömung darstellt, daß aber diese mögliche Strömung nicht unter allen Umständen stabil ist, und darum bei bestimmten Versuchsbedingungen, und zwar gerade bei den großen Verhältnissen der Wasserleitungen usw., nicht in Erscheinung treten kann. Aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung[2]) leitete er ein Gesetz ab, nach welchem die einzige für eine Strömung zwischen festen Wänden charakteristische Konstante R, welche wir weiterhin als Reynoldssche Zahl bezeichnen wollen, sich aus Dichte ϱ, Reibungskoeffizienten μ, mittlerer Geschwindigkeit $\bar{v}$ und einer linearen Abmessung l der Strömung (wie Röhrendurchmesser, Tiefe oder dgl.) so zusammensetzt, daß

$$R = \frac{\varrho \bar{v} l}{\mu}.$$

Durch eine Reihe von Experimenten an Röhren hat er ferner bewiesen, daß bei einer gewissen kritischen „Reynoldsschen Zahl“ die Poiseuillesche Strömung instabil zu werden beginnt, gleichgültig, welches der absolute Wert jeder einzelnen der in Betracht kommenden Größen ist.

Indes eine einwandfreie und befriedigende theoretische Durchführung dieses Gedankens von der Instabilität der laminaren Bewegung ist Reynolds doch nicht gelungen. Mit Hilfe einer Energiebetrachtung[3]) erwies er zwar die Möglichkeit

---

1) O. Reynolds, Scientific papers 2. p. 51—105, sowie die populären Vorträge über diesen Gegenstand, l. c. 2. p. 153—162 u. 524—534.

2) O. Reynolds, l. c. p. 55.

3) O. Reynolds, Scientific papers 2. p. 535—577.

einer solchen Instabilität, doch ist sein Resultat nur in sehr geringer Übereinstimmung mit der Erfahrung. Und viel weiter ist die Theorie auch bei Reynolds's Nachfolgern nicht gekommen. Lorentz[1]) vereinfachte und vertiefte zwar die Energiebetrachtung, doch ergab sich auch bei ihm noch kein ganz überzeugendes Resultat; Kelvin[2]) gelangte zu der Konsequenz, daß es sich nicht um eine gewöhnliche, d. h. mit unendlich kleinen Störungen erregbare Instabilität handle; Rayleigh[3]) bekämpfte dies Resultat, und zwar wohl mit Recht; und schließlich die konsequente Durchrechnung des Problems nach der Methode der kleinen Schwingungen durch Sommerfeld[4]) ist noch nicht zu Ende geführt. So können wir unsere Frage, ob wir die hydrodynamische Theorie als zureichend ansehen dürfen oder nicht, noch keineswegs als gelöst betrachten.

Größeren Erfolg hat die weitere experimentelle Durchführung zu verzeichnen; Couette[5]) bestätigte Reynolds Resultate an Röhren und wies ein analoges Verhalten an einer Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Zylindern nach, von denen der eine bewegt wird; ein theoretisch sehr interessanter Fall, da er bei stabiler Strömung näherungsweise durch den einfachsten Ansatz einer linearen Geschwindigkeitsverteilung dargestellt werden kann, und so den Untersuchungen von Lorentz, Kelvin und Sommerfeld zugrunde liegt. Von weiteren Arbeiten nenne ich hier nur die von Ruckes[6]), welcher zeigte, daß die für Flüssigkeiten geltenden Gesetze sich auf Gase übertragen lassen.

Gar nicht untersucht wurde dagegen bisher der Fall der freien Flußströmung, und es war aus verschiedenen Gründen verlockend, gerade diesen Fall experimentell zu behandeln. Nicht nur, daß die Lücke ausgefüllt werden mußte; es war auch sonst mancher Aufschluß durch das teilweise Fehlen fester Wände zu erwarten; ja man konnte sogar hoffen, an

---

1) H. A. Lorentz, Abhandlungen über theor. Physik **1.** p. 43.

2) Lord Kelvin, Phil. Mag. Aug. u. Sept. 1887.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 1892. p. 59; Scientific papers **3.** p. 575.

4) A. Sommerfeld, Verh. d. int. Mathem.-Kongresses, Rom 1908.

5) M. Couette, Ann. de chim. et phys. **21.** p. 433. 1890.

6) W. Ruckes, Ann. d. Phys. **25.** p. 983. 1908.

dem Verhalten der freien Oberfläche einiges vom Verlauf der „turbulenten Bewegungen“ geradezu zu sehen.

§ 2. Apparat und Ausrechnung der Experimente.

Die der Untersuchung dienende Anordnung ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

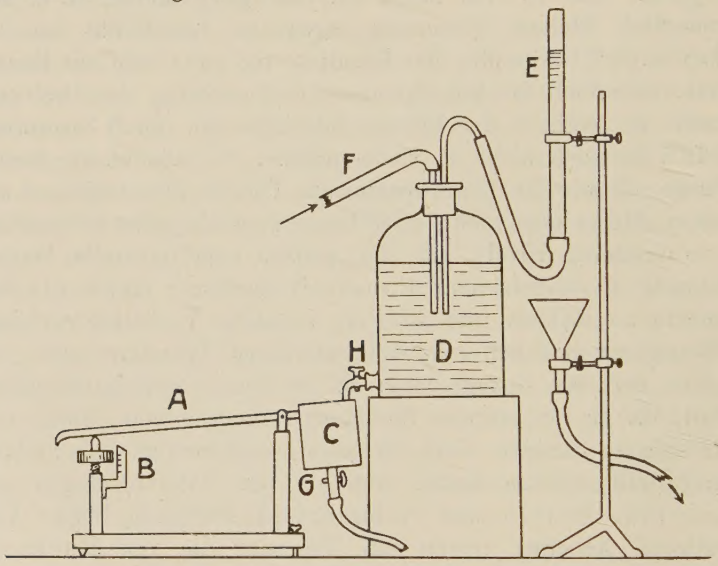


Fig. 1.

Eine sorgfältig geglättete Messingrinne *A* von 5,2 cm Breite diente als Flußbett und konnte durch eine Schraube *B* mit 1,3 mm Ganghöhe ein beliebiges Gefälle erhalten. Über diese Rinne sollte das Wasser nur unter Einfluß der Schwere strömen. Um möglichst alle Störungen auszuschalten, gelangte das Wasser von der Leitung her bei *F* in eine große, 20 Liter fassende Flasche *D*, von dieser in ein kleineres, 3 Liter fassendes Gefäß *C*, das mit der Rinne fest verbunden war, und aus dem das Wasser in die Rinne hinein überlief. Durch den Hahn *G* war eine feinere Regulierung möglich gemacht. Um von den starken Schwankungen in der Leitung unabhängig zu werden, wurde noch ein Überlauf *E* an die Flasche angeschlossen, so daß die Ausflußmenge durch den Überdruck

des Niveaus in E über das Niveau in C gegeben und, durch Einstellung des Wasserleitungshahnes und der beiden Hähne G und H passend geregelt, auf beliebige Zeit konstant blieb.

Bei den Versuchen mit Zuckerlösung wurde die Wasserleitung durch ein auf hohem Gerüst festgestelltes, 200 Liter fassendes Blechgefäß ersetzt, in welches nach Beendigung des Versuches die aufgefangene Flüssigkeit mittels einer Wasserstrahlpumpe wieder emporgesaugt wurde; das war leicht möglich, da die Höhe des oberen Gefäßes über dem Boden des unteren etwa 4 m betrug.

Zum Messen der Ausflußmengen diente eine gewöhnliche Meßflasche; zur Messung der Tiefe wurde — nach vergeblichen Versuchen mit einem Dickenmesser und einem Senkblei — ein besonderer durch Fig. 2 veranschaulichter einfacher Apparat konstruiert: eine am Boden feststehende Anordnung mit einer vertikal beweglichen, sehr feinen Schraube a von 0,434 mm Ganghöhe und einer horizontal beweglichen Schraube b, deren Bedeutung im nächsten Paragraphen deutlich werden wird. Berührte die Metallspitze c die Oberfläche des Flusses, so ließ sich das an einer deutlichen Zuckung und Wellenbildung an der Oberfläche sehr gut erkennen. Die Berührung mit der Grundfläche wurde durch Schließung eines elektrischen Stromkreises noch genauer beobachtet.

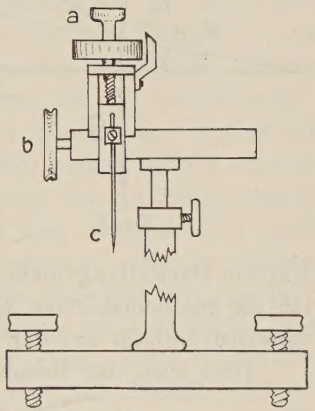


Fig. 2.

Das Gefälle wurde an der Schraube B (Fig. 1) abgelesen, nachdem vor jedem Versuch die Rinne mittels einer Libelle horizontal gestellt war, sowohl in der Stromrichtung, wie senkrecht dazu.

Zunächst ist die Formel zur Ausrechnung der Versuche anzugeben. Wir suchen die Ausflußmenge Q pro Sekunde in einem Flusse von endlicher, aber gegen die Tiefe h sehr großer Breite $2b$, von der Dichte ϱ und der Reibungskonstanten μ, bei einem Gefälle α. Wir rechnen unter Voraus-

setzung einer stabilen laminaren Strömung, d. h. wir nehmen von vornherein eine Geschwindigkeitskomponente nur in der durch das Flußbett bestimmten x-Richtung an. In der x-Richtung wird die Strömung beiderseits unbegrenzt angenommen. In der um α gegen die Vertikale geneigten y-Richtung reicht sie von $y = 0$ (Grund) bis $y = h$ (Oberfläche), in der z-Richtung von $z = -b$ bis $z = +b$ (seitliche Ränder des Flusses).

So haben wir die Differentialgleichungen zu lösen:

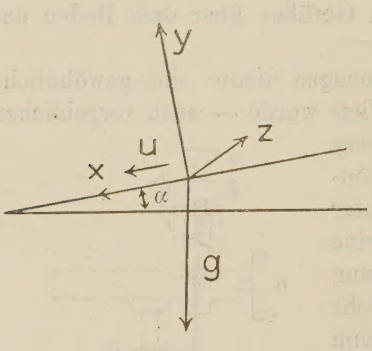


Fig. 3.

$$(1)\quad \begin{cases} \mu\,\Delta u = -\varrho g \sin\alpha, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\varrho g \cos\alpha, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Dazu die Grenzbedingungen:

$$(2)\quad \begin{cases} u = 0 \quad \text{für} \quad y = 0, \\ u = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm b, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = h, \\ p = 0 \quad \text{für} \quad y = h. \end{cases}$$

Um die Darstellung nicht zu sehr zu unterbrechen, unterdrücke ich die mathematischen Durchführungen an dieser Stelle und verweise deshalb auf den Anhang 1.

Dort wird das Resultat erhalten:

$$(3)\qquad Q = \frac{2}{3}\,\frac{\varrho g \sin\alpha}{\mu}\, b h^3 \left(1 - 0{,}63\,\frac{h}{b}\right).$$

Das erste Glied ist der bekannte Ausdruck für unendliche Breite, das zweite bringt die Korrektion auf endliche Breite bis auf Glieder von der Größenordnung $e^{-\frac{2h}{b}}$.

Ziel der Experimente war, festzustellen, ob und inwieweit Formel (3) — als Konsequenz der hydrodynamischen Theorie — Gültigkeit beanspruchen darf.

Um dies in den Kurven gut zum Ausdruck zu bringen, befolgte ich die bei derartigen Untersuchungen meistens gewählte Methode, den „kinematischen Reibungskoeffizienten“ μ/ϱ als Unbekannte zu betrachten, und unter Zugrundelegung obiger Formel zu messen. Solange sich ein konstanter Wert ergab, konnte die Formel als richtig angesehen werden.

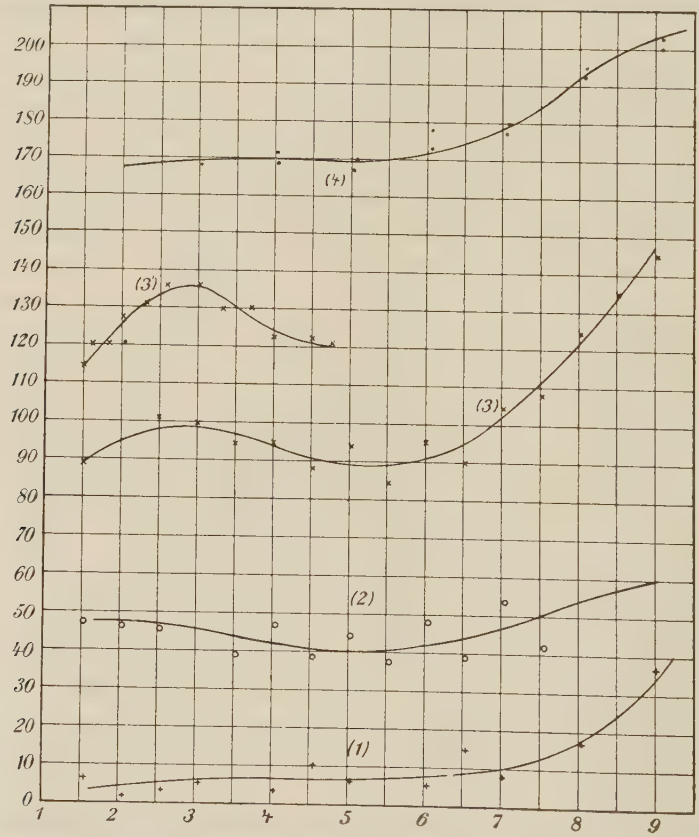
§ 3. Fehlerquellen.

Dem ganzen Problem nach war es nicht das Ziel der Experimente, auf eine sehr große Meßgenauigkeit hinzuarbeiten, zumal derselben durch verschiedene, schwer eliminierbare Fehlerquellen eine Grenze gesetzt war. Bei Versuchen in einer Röhre oder bei der Couetteschen Anordnung gilt es nur, Drucke, Widerstände und Ausflußmengen zu messen, lauter Größen, die nur linear in die zu prüfende Beziehung eingehen; die linearen Abmessungen der Strömung bleiben konstant und sind einfach zu bestimmen. Bei den vorliegenden Experimenten machten auch die Messung der Ausflußmenge und des Gefälles keine Schwierigkeiten, da sie sich ohne weiteres auf 1 Proz. genau angeben ließen. Dagegen traten starke Schwierigkeiten auf bei Messung der Tiefe. Diese steht in der 3. Potenz in der Gleichung für die Ausflußmenge; es ist daher nötig, sie sehr genau zu bestimmen. Zudem ist die absolute Größe dieser Tiefe nur sehr gering, etwa 1—3 mm. Wollte man also nur so weit kommen, als zur Entscheidung des Problems dringend erforderlich war, so mußte die Tiefe auf etwa $^1/_{50}$ mm genau gemessen werden. Die im vorigen Paragraphen beschriebene Anordnung gab eine viel größere Genauigkeit; denn sowohl die Berührung der Oberfläche, wie der Grundfläche war sehr deutlich zu sehen. Aber es kommen an der freien Oberfläche eines Stromes verschiedene Fehlerquellen in Betracht, die diese Genauigkeit zu einer illusorischen machen, und auf die wir einzeln eingehen müssen.

Ein Punkt, der sogleich in die Augen springt, ist die Ungleichheit der Tiefe in der Stromrichtung. Einmal ist die aus dem Gefäß *C* austretende Strömung erst in einiger Entfernung als stationär anzusehen, dann gibt es am Ausfluß eine kleine Stauung, ferner würde unser Ansatz beim Gefälle Null auch die Geschwindigkeit Null erfordern, was durchaus nicht erfüllt ist, da die Erhebung der oberen über die unteren Wasserschichten auch in diesem Falle eine Strömung hervorrufen würde. Unsere Formel gilt für eine stationäre, beschleunigungslose Strömung mit einer parallel zur Grundfläche gerichteten Oberfläche. Da nun aber durch jeden Stromquerschnitt in derselben Zeit dieselbe Flüssigkeitsmenge fließen muß, wird

obige Formel richtig angewandt werden, wenn man nur an einer Stelle mißt, an welcher die Oberfläche parallel der Grundfläche verläuft. Mißt man an irgend einer anderen Stelle, so setzt man offenbar eine zu große Tiefe in Formel (3) ein, und erhält infolgedessen eine zu große Ausflußmenge, bzw. einen zu großen Reibungskoeffizienten.

Fig. 4 zeigt Höhenkurven in der Stromrichtung und gibt so Aufschluß über die hier zu erwartenden Versuchsfehler.



Abszisse: Marken (Schrauben) an der Rinne, im Abstand von etwa 4,5 cm. Ordinate: Einteilung der Meßschraube. Anfangspunkt willkürlich gewählt. 10 Teilstriche der Ordinate = 0,02 mm. Größter Fehler etwa ebensoviel, also durchaus innerhalb der Fehlergrenze; die in einzelnen Kurven scheinbar systematischen Abweichungen sind daher ohne Bedeutung.

Fig. 4. *Oberfläche in der Stromrichtung.*

Kurven 1, 2, 3 sind an Wasserströmungen von ungefähr gleicher Ausflußmenge aufgenommen, bei Gefällen von $^1/_{25}$, bzw. $^1/_{50}$ und $^1/_{125}$. (3′) ist eine teilweise, genauere Nachprüfung von (3). Man sieht, daß sich bei den ersten beiden Gefällen eine stationäre Strömung, wie man sie verlangen muß, genügend genau herstellt, bei ersterer zwischen den Marken 2 und 6, bei letzterer etwa zwischen 4 und 6. Kurve 3 zeigt dagegen nur ein Minimum, und man ist wohl sicher, an der Stelle des Minimums eine der stationären Strömung entsprechende Geschwindigkeitsverteilung zu haben, nicht aber, daß die Geschwindigkeit der bei dem bestimmten Gefälle stationären entspricht.

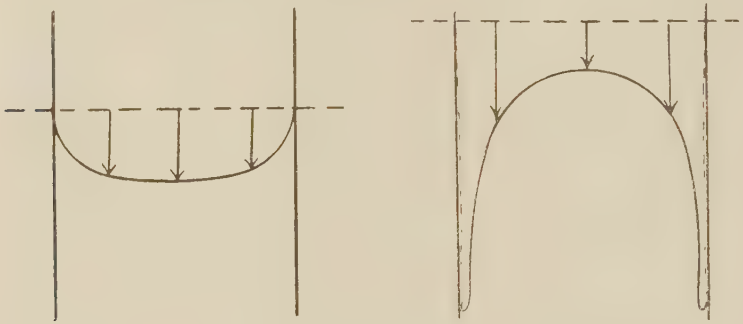
Die Tiefe wurde immer in der Nähe der mit 5 bezeichneten Stelle gemessen; der absolute Wert, der für den Reibungskoeffizienten erhalten wurde, war bei großem Gefälle richtig, bei kleinem zu hoch. Die Kurven zeigen, daß diese Abweichung aus der mangelnden Stationarität der Strömung verständlich wird.

Kurve 4 zeigt schließlich die Strömung der ersten benutzten Zuckerlösung bei Gefälle $^1/_{25}$. Auch hier ist die Strömung nicht so gut stationär geworden wie bei Wasser; so wird wohl der zu hohe Wert des Reibungskoeffizienten zu erklären sein.

Für die Diskussion des Problems spielte aber die Abweichung von den absoluten Werten keine Rolle, da es ja nur darauf ankam, zu zeigen, wie lange man die Strömung als laminar ansehen kann. Der kritische Punkt, an welchem diese einfache Gesetzmäßigkeit zu gelten aufhört, war auch dann sehr wohl zu erkennen, wenn ein Fehler im absoluten Wert der Konstanten vorhanden war. Das wird an den im nächsten Paragraphen mitgeteilten Kurven deutlich werden.

Ungleich größere Schwierigkeiten bereitete ein Umstand, dessen Wirkung ich erst weit unterschätzt hatte, nämlich die Ungleichheit der Tiefe senkrecht zur Stromrichtung, hervorgerufen durch die Kapillarerhebung an den Seitenrändern. Wurde die in der Mitte des Flusses gemessene Tiefe in Formel (3) eingesetzt, so ergab sich nie, selbst für noch so langsame und seichte Strömung, ein konstanter Wert für den Reibungskoeffizienten, und zwar immer zu niedrige Werte, was eine Deutung als Turbulenzerscheinung vollkommen ausschloß. Daß wirklich die Kapillarerhebung an den Wänden eine so große Wirkung verursachte, konnte dadurch leicht deutlich

gemacht werden, daß feines Mennigepulver in die Strömung geworfen wurde. Anstatt daß nun, wie man erwarten mußte, in der Mitte die größte Geschwindigkeit, an der Seite nur eine kleine aufgetreten wäre, und so die Mennige auf der Oberfläche, gegen den Strom gesehen, eine konvexe Kurve gebildet hätte, zeigte sich gerade das Gegenteil, eine konkave Kurve, und zwar mit sehr weit voreilenden Seitenstücken. Die beiden Bilder sind nachstehend (Fig. 5) skizziert.



Strömung ohne Kapillarwirkung nach Formel (7) des Anhangs.

Beobachtete Strömung.

Fig. 5.

Auch theoretisch ist diese Erscheinung leicht einzusehen. Die Differentialgleichungen der Strömung bei Berücksichtigung der Kapillarwirkung bleiben dieselben wie früher, ebenso die Grenzbedingungen bis auf die eine:

$$p_n = 0 \text{ an der Oberfläche,}$$

welche nun die Form erhält:

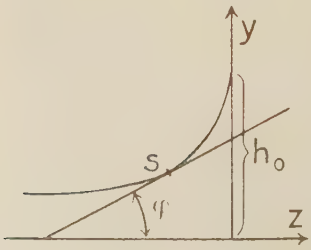


Fig. 6.

$$(4) \qquad \pm T \frac{d\varphi}{ds} + g\varrho \cos \alpha y = 0,$$

wobei s die Bogenlänge der Oberfläche von der Mitte aus bedeutet, φ den Winkel der Tangente an die Oberfläche gegen die z-Achse, T die Kapillarkonstante.

Von den beiden Vorzeichen der Krümmung $d\varphi/ds$ müssen wir das negative wählen, da der

Kapillardruck den nach unten wirkenden Zug der Schwere zu verkleinern strebt.

Wir können der Gleichung sofort ein wichtiges Resultat ansehen: In der die Gestalt der Oberfläche bestimmenden Gleichung (4) kommt keine Geschwindigkeit vor, in den die Strömung bestimmenden Differentialgleichungen (1) und anderen Grenzbedingungen (2) tritt umgekehrt die Form der Oberfläche nicht auf; nur das Gefälle spielt in beiden eine Rolle, allerdings bei der Form der Oberfläche keine große, da nur $\cos\alpha$ bestimmend ist. Bei gleichem Gefälle können wir jedenfalls schließen (und in Annäherung auch bei verschiedenem Gefälle), daß die Form der Oberfläche unter Einwirkung der Kapillarität (solange keine Oberflächenwellen auftreten) unabhängig von der Ausflußmenge ist.[1]) Es ist also klar, daß bei geringer Tiefe der Einfluß der Kapillarität ein größerer ist wie bei beträchtlicher Tiefe. Die Größenordnung dieses Einflusses erhalten wir durch Auflösen unserer Gleichung (4).

Bezeichnet h_0 die Erhebung über die Grundfläche am Rande, γ das Komplement des Randwinkels, so ergibt sich für unendliche Breite das (in Anhang 2 abgeleitete) Resultat:

$$(12)\quad \begin{cases} z' = \frac{1}{k}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} - \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}\right) + \frac{2}{k}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right), \\ h_0 - y = \frac{2}{k}\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right). \end{cases}$$

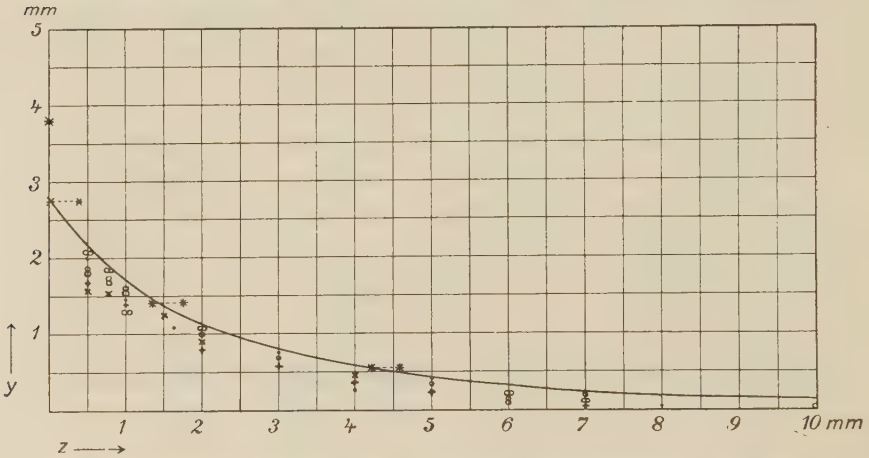
In der nachstehenden Fig. 7 sind sechs Messungen der Wasseroberfläche bei verschiedenen Ausflußmengen graphisch aufgetragen, dazu die nach obiger Formel berechnete Oberfläche bei Randwinkel 0^0 bzw. 30^0. Die Erfahrung bestätigt das theoretische Resultat vollkommen. Der Randwinkel betrug bei den Experimenten den Kurven nach ungefähr 35^0; dieser Wert ist den in der Literatur[2]) angegebenen gegenüber ziemlich groß, doch sind diese ja stets an sehr sorgfältig gereinigtem Material gemessen. Die Vernachlässigung der endlichen Breite war offenbar berechtigt, da ja die Erhebung über das Mittel-

1) Dies Resultat wurde auch schon von R. H. Weber erhalten, Ann d. Phys. **26.** p. 884. 1908.

2) z. B. F. Pockels in Winkelmanns Handbuch **1.**

niveau bereits in 1 cm Entfernung von der Wand praktisch verschwindet und die halbe Breite der Rinne 2,6 cm betrug.

Wichtig ist nun das Resultat, daß an der Seite das Wasser um etwa 2,5 mm höher stand, wie in der Mitte. Da bei den Messungen die Tiefe des Flusses selten größer war als etwa 2,5 mm und manchmal sogar kleiner als 1 mm, die Ausflußmenge aber mit der dritten Potenz der Tiefe wächst,



Die ausgezogene Kurve ist die theoretische Oberflächenform bei Randwinkel 30°. * bedeutet theoretische Kurven. Die für 0° Randwinkel berechnete Kurve ist gegen die für 30° nur horizontal verschoben. Gemessene Oberfläche bei gleichbleibendem Gefälle $^1/_{25}$ und verschiedener Ausflußmenge, nach der Größe der Ausflußmenge geordnet: • ○ × + 8 ∞. Größte Abweichung $^1/_2$ mm, nahe am Rand, wo die Schwankungen der Oberfläche sehr groß sind. Selbst diese Fehlergrenze war nur durch viele Mittelbildung zu erhalten. Resultat: Keine systematische Abweichung bei verschiedenen Ausflußmengen.

Fig. 7. *Oberfläche senkrecht zur Stromrichtung.*

so ist leicht einzusehen, daß die Kapillarerhebung die Resultate vollkommen verschleiern mußte.

Es war die größte Schwierigkeit bei der ganzen Arbeit, dieser Fehlerquelle Herr zu werden. Es gelang mir nicht, die Strömungsaufgabe, wie sie im Anhang 1 für eine ebene Oberfläche gelöst wird, auch für die durch Kapillarität veränderte Oberfläche zu diskutieren. Auch eine graphische Näherung ergab kein befriedigendes, die Versuchsresultate gut darstellendes Resultat.

So versuchte ich denn die Kapillarerhebung ganz zu beseitigen, indem ich die Seitenwände stark einfettete. Eine kleine Kapillardepression konnte ja das Resultat nicht in nennenswerter Weise ändern, da eine solche nur an Stellen geringer Ausflußmenge wirksam ist, da ferner der Randwinkel bei Depression viel größer und daher die Abweichung der Oberfläche von der Horizontalen viel geringer ist. Die ersten so gemachten Experimente gaben ein befriedigendes Resultat, die weiteren nicht mehr. Es zeigte sich, daß die Wirksamkeit des Fettes in dieser Hinsicht ziemlich schnell erlosch. Dasselbe ergaben Versuche mit Paraffinwänden. Schließlich verfuhr ich in der Weise, daß ich für jede Messung an die Seitenwände neue Streifen von paraffiniertem Asbestpapier klebte. Versuche zeigten, daß dies etwa eine Stunde lang mit dem gesuchten Erfolge benutzt werden konnte; und eine Messung dauerte etwa $^1/_2$ Stunde. Paraffinierte Papierstreifen waren nicht verwendbar, da sie sich, wohl infolge der Quellung der Pflanzenfaser, viel schneller abnützten.

Daß auf diese Weise alle systematischen Fehler vermieden waren, zeigten Versuche mit Mennige der oben geschilderten Art, und schließlich am klarsten das Resultat: ein richtiger, konstanter Wert des Reibungskoeffizienten.

Dennoch war es immer eine ziemliche Schwierigkeit, die Tiefe mit der nötigen Genauigkeit zu messen. Die rauhen Ränder der Asbeststreifen verursachten doch stets unregelmäßige Erhebungen der Oberfläche, die oft viel mehr wie $^1/_{50}$ mm — die erforderte Genauigkeit — betrugen; dazu kamen die regelmäßigen Oberflächenwellen, von denen später ausführlich die Rede sein wird. Um also ein genaues Resultat zu erhalten, mußte die Berührung der Schraubenspitze mit der Oberfläche öfter an der Schranbentrommel abgelesen und dann ein Mittelwert bestimmt werden. Es wurden immer etwa 20 solche Ablesungen gemacht und zwar an 2 bis 4 verschiedenen Stellen des Flusses in der Nähe der Marke 5 (Fig. 4). Zwischen je zwei Ablesungen wurden die Seitenwände mit Filterpapier abgewischt, um die Bedingungen an den Rändern möglichst verschieden zu gestalten und so systematische Fehler zu vermeiden. So gelang es schließlich doch, die Tiefe auf etwa 1—1,5 Proz. genau anzugeben, d. h. im Werte der Reibungs-

konstanten eine Genauigkeit von 3—5 Proz. zu erzielen. Nur ganz selten traten in den im nächsten Paragraphen mitzuteilenden Kurven Punkte auf, die stärkere Abweichung zeigten.

§ 4. Resultate.

Die Resultate der Messungen sind niedergelegt in den Figg. 8—15, zu deren Interpretation es nur weniger Angaben bedarf.

Als Abszisse dient die einzige für jede Strömung charakteristische Größe, die Reynoldssche Zahl

$$R = \frac{\bar{v}\, h\, \varrho}{\mu} = \frac{Q}{2b} \cdot \frac{\varrho}{\mu},$$

welche aus den gemessenen Größen Q und b und aus dem, den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommenen Werte des kinematischen Reibungskoeffizienten berechnet ist.

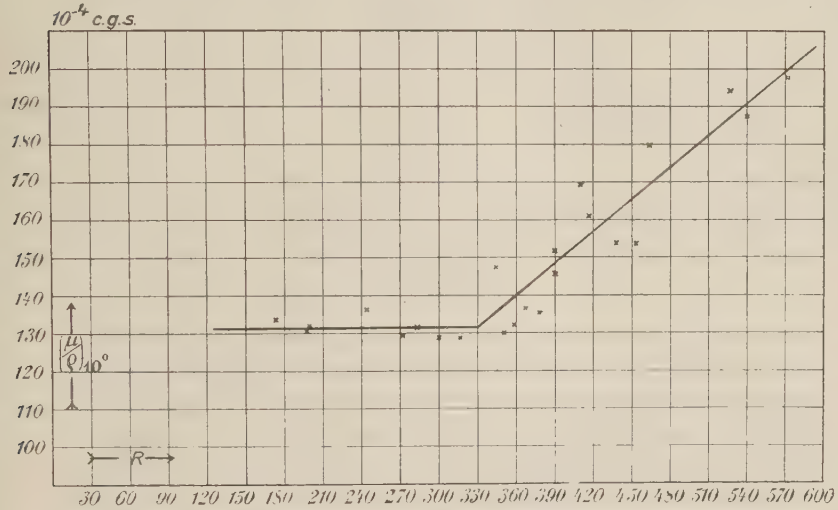
Als Funktion der Reynoldsschen Zahl ist die Größe μ/ϱ aufgetragen, so wie sie sich bei Anwendung der Formel (3) aus den gemessenen Größen ergibt. Natürlich ist dabei auf die Temperatur sorgfältig Rücksicht genommen, indem vor und nach dem Versuch ein im Gefäß C befindliches Thermometer abgelesen wurde, und sind, um sie vergleichbar zu machen, alle Messungen nach den aus Landolt-Börnstein bekannten Verhältnissen auf eine mittlere Temperatur reduziert, die in den Kurven vermerkt ist.

So geben die Kurven ein Bild des Widerstandes in der Flüssigkeit oder der von der Schwere geleisteten Arbeit als Funktion der Strömungskonstanten R. Solange die Poiseuillesche laminare Strömung stabil bleibt, ergibt sich ein konstanter Wert von μ/ϱ. Für große R wird diese Konstanz nicht erhalten, die Stabilität der Strömung ist gestört, bei weiterer Anwendung der Formel (3) ergibt sich ein immer größer werdender scheinbarer Reibungskoeffizient.

Die Kurven, welche die von der Beobachtung gelieferten Punkte verbinden sollten, waren bei der verhältnismäßig großen Ungenauigkeit der Messungen einer gewissen Willkür anheimgegeben, welche die Resultate zu verschleiern drohte. Um diese nach Möglichkeit einzuschränken, wurden folgende Bestimmungen konsequent festgehalten:

Die Punkte sind bis zum kritischen Wert R_k durch eine horizontale Gerade $\mu/\varrho = a$ zu verbinden, von da an durch eine geneigte Gerade $\mu/\varrho = a + b(R - R_k)$. Die Konstanten a und b sind nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu bestimmen. Für R_k sind nacheinander einige Werte festzusetzen, und derjenige ist schließlich als die gesuchte kritische Zahl anzugeben, der den geringsten wahrscheinlichen Beobachtungsfehler Δ aufweist.

Fig. 8 zeigt die erste und am genauesten verfolgte derartige Kurve, aufgenommen bei einem Gefälle $^1/_{25}$.



$(\mu/\varrho)_{10^\circ}$ bedeutet, daß alle Werte des kinematischen Reibungskoeffizienten auf die Temperatur 10° reduziert sind.

Fig. 8. *Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle* $^1/_{25}$.

Die geschilderte Methode wurde auf fünf verschiedene R_k angewandt, und es ergab sich das in der folgenden Tabelle niedergelegte Resultat:

R_k	Δ
310	4,96
330	4,69
340	4,71
350	4,73
360	4,88

Man sieht ohne weiteres, besonders wenn man sich diese Tabelle graphisch aufträgt, daß das Minimum in der Nähe von 330 liegt und etwa auf 3 Proz. genau zu bestimmen ist.

Um von der Größe des wahrscheinlichen Fehlers einen Begriff zu geben, sei bemerkt, daß er etwa 3 Proz. Abweichung im Werte des Reibungskoeffizienten entspricht, also etwa 1 Proz. in der Tiefenmessung. Nach den Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen ist klar, daß diese Genauigkeit nur durch Mittelung aus sehr vielen Beobachtungen erhalten werden konnte. Die gesuchte kritische Reynoldssche Zahl ist also bei einem Fluß mit freier Oberfläche:

$$R_k = 330.$$

Vergleicht man diese Zahl mit den von Reynolds und Couette gefundenen:

$$R_k = 2200$$

bei Röhren und

$$R_k = 950$$

bei der Couetteschen Anordnung, wobei in der Formel

$$R = \frac{\varrho\, \bar{v}\, l}{\mu}$$

die Länge l stets durch die lineare Abmessung von Wand zu Wand, also z. B. durch den Durchmesser bei Röhren gegeben ist, so findet man, daß der Wert im Falle des Flusses ein erheblich niedrigerer ist, wie bei allseitiger Begrenzung durch feste Wände; daß also eine freie Oberfläche nicht die stabilisierende Kraft einer festen Wand hat.

Nach dem Reynoldsschen Gesetze sollen nun alle Strömungen ähnlich sein, welche dieselbe Reynoldssche Zahl R haben, und es muß also auch die kritische Zahl R_k für alle Gefälle, alle Flüssigkeiten, alle Wandmaterialien dieselbe sein.

Figg. 9—11 prüfen die Gültigkeit des Gesetzes für verschiedene Gefälle, sind nach der gleichen Methode behandelt und ergeben das Resultat:

Gefälle	R_k	$\bar{v}$	Δ
$^1/_{125}$	300	13,5 cm/sec	1,83
$^1/_{50}$	310	20 „	2,83
$^1/_{25}$	330	26,5 „	4,69
$^3/_{50}$	330	31,5 „	4,77

Das Reynoldssche Gesetz kann also an Flüssen von verschiedenem Gefälle innerhalb der Fehlergrenze bestätigt werden. Variation des Gefälles ist gleichbedeutend mit Variation der Geschwindigkeit und der Tiefe. Die dritte Spalte der

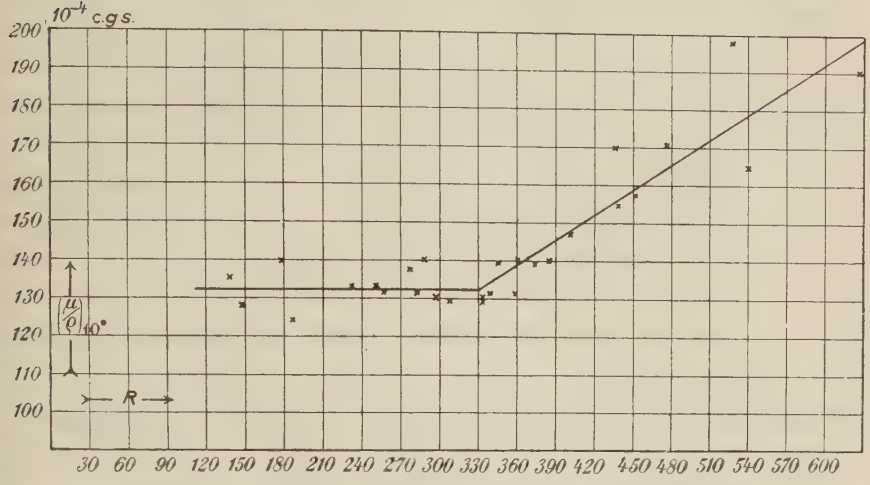


Fig. 9. *Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle* $^{9}/_{50}$.

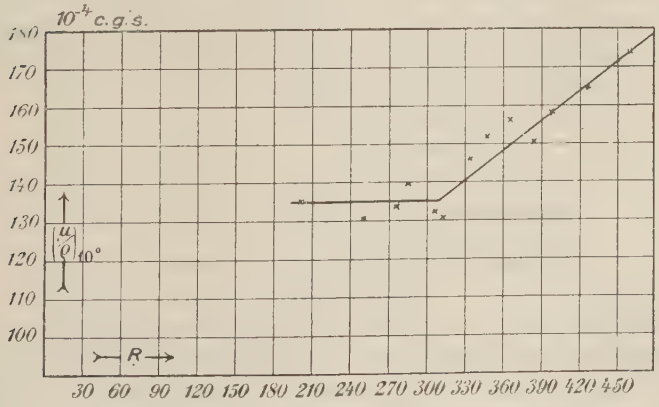


Fig. 10. *Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle* $^{1}/_{50}$.

Tabelle zeigt, wie stark die Geschwindigkeit bei den verschiedenen Neigungen variiert. Dennoch bleibt die kritische Reynoldssche Zahl merklich konstant. Wichtig für spätere Betrachtungen ist noch, daß unter keinen Umständen — auch

nicht in zweiter Näherung — eine Abnahme von R_k bei zunehmendem Gefälle zu konstatieren ist.

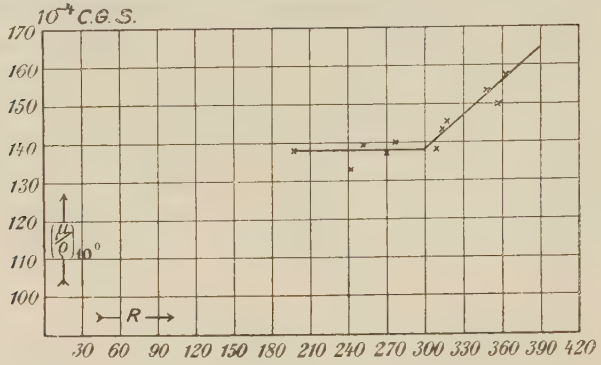


Fig. 11. *Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle* $^1/_{125}$.

In der letzten Spalte der Tabelle sind noch die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler vermerkt. Es zeigt sich, daß diese für kleineres Gefälle sich stark verkleinern, und das ist leicht begreiflich; denn bei kleinerem Gefälle ist erstens die Tiefe größer, also der Beobachtungsfehler in der Tiefenmessung nicht so wirksam, zweitens die störende Wellenbildung geringer.

Figg. 12 und 13 prüfen das Reynoldssche Gesetz für verschiedene Flüssigkeiten und ergeben:

Flüssigkeit	R_k
Zuckerlösung I, etwa 25 %	250
Zuckerlösung II, etwa 12 %	280
Wasser	330

Hier ist also eine starke Abweichung vom Reynoldsschen Gesetze zu konstatieren, die nicht mehr als bloßer Versuchsfehler gedeutet werden kann. Dies sieht man leicht ein, wenn man z. B. versucht, die Beobachtungen der Figg. 11 u. 12 gleichmäßig durch Festsetzung der kritischen Zahl $R_k = 270$ zu befriedigen. Rechnet man dann nämlich den Beobachtungsfehler Δ im Sinne der Tabelle p. 19 aus, so erweist er sich im ersten Fall als weit vor seinem Minimum, im zweiten Fall als weit dahinter gelegen.

Durch die Versuche von Ruckes war ferner nahegelegt, daß Wandmaterial und Wandrauhigkeit einen starken Einfluß auf die kritische Zahl hätten. Es lag also die Vermutung nicht fern, man könne die Abweichung auf ein Rauhwerden der Wand durch abgeschiedene Zuckerkriställchen zurück-

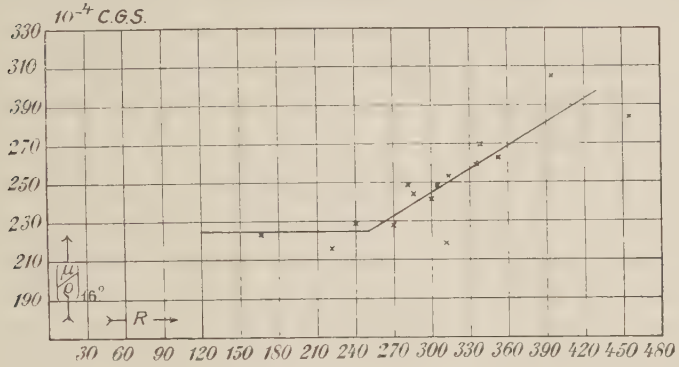


Fig. 12. *Glatte Messingrinne. Zuckerlösung I. Gefälle* $^1/_{25}$.

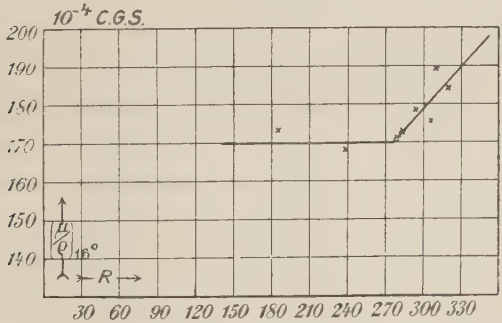


Fig. 13. *Glatte Messingrinne. Zuckerlösung II. Gefälle* $^1/_{25}$.

führen. Das war die direkte Veranlassung zu den in Figg. 14 und 15 niedergelegten Versuchen. Es wurde in die § 2 beschriebene Rinne einmal eine durch Feilstriche gerauhte Messinggrundfläche, einmal eine sehr glatte Grundfläche aus Spiegelglas hineingelegt und R_k gemessen. Die Fehler waren naturgemäß bei der rauhen Grundfläche etwas größer wie sonst. Bei der Glasfläche trat die Schwierigkeit auf, daß die Berührung der Schraubenspitze mit der Grundfläche nicht

durch den elektrischen Kontakt gemessen werden konnte, doch gab auch die Beobachtung der Berührung mit dem Spiegelbild die nötige Genauigkeit.

	Grundfläche	R_k
Wasser. Gefälle $^1/_{50}$	Glattes Messing . . .	310
	Rauhes Messing . . .	300
	Glas	310

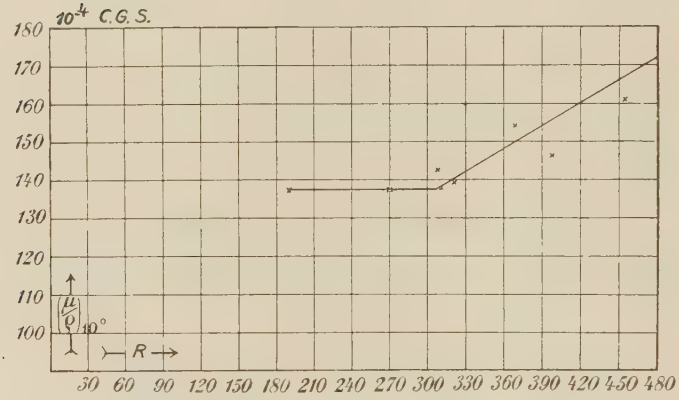


Fig. 14. *Glasrinne. Wasser. Gefälle* $^1/_{50}$.

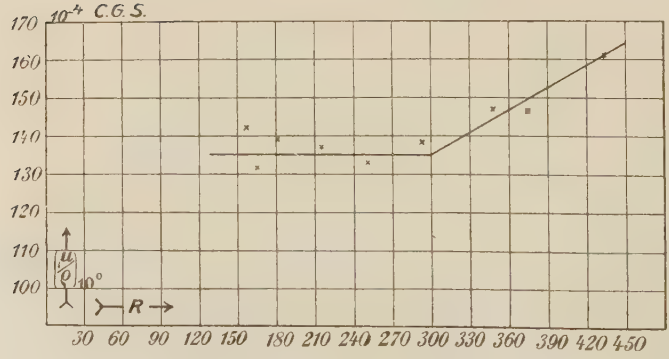


Fig. 15. *Rauhe Messingrinne. Wasser. Gefälle* $^1/_{50}$.

Die Kurven sind weder experimentell noch in der Ausrechnung so genau verfolgt, wie die früheren, zeigen aber

deutlich, daß eine merkbare Änderung der kritischen Zahl nicht vorhanden ist.

Im Hinblick auf den vorigen Paragraphen soll noch bemerkt werden, daß die absoluten Werte der Reibungskonstanten in den Kurven einen systematischen Fehler in der nach Fig. 4 erwarteten Richtung aufweisen; daß dieser in Figg. 14 und 15 so viel größer ist als in der entsprechenden Fig. 10, erklärt sich ungezwungen daraus, daß bei den entsprechenden Versuchen die in die Rinne gelegten Grundflächen nicht gleich am Gefäß C begannen, und so der Eintritt des stationären Zustandes verzögert wurde. Die richtige Reibungskonstante für die Zuckerlösungen, wie sie zur Berechnung der Abszisse R nötig war, wurde durch exakte Messungen in Kapillarröhren bestimmt.

Das Hauptproblem war nun weiter, über die Gründe der Abweichung vom Reynoldsschen Gesetz Rechenschaft abzulegen. Zu diesem Zweck mußte zunächst untersucht werden, ob die Abweichung nicht vielleicht durch die Beschaffenheit der Flüssigkeit allein bedingt war und ob man sie nicht auch in Röhren finden konnte. Es wurde zu diesem Zweck die kritische Zahl für Wasser- und Zuckerlösung I in einer Röhre gemessen. Die verwendete Glasröhre hatte einen Radius von 0,131 cm. Die Ausflußmengen wurden wieder mit der Meßflasche, die Druckhöhen bei größeren Drucken direkt gemessen, bei kleineren mit dem Kathetometer. Aus Gründen, die im Anhang 3 auseinandergesetzt werden, trat der Strahl am Ende der Röhre frei aus. Das Resultat ist in Figg. 16 und 17 niedergelegt:

Flüssigkeit	R_k	$\bar{v}$
Wasser	2280	100 cm/sec
Zuckerlösung I .	2200	170 „

Die Abweichung ist also durchaus nicht von der Größenordnung wie beim Flusse und ist dort nicht als Eigenschaft der Flüssigkeit, sondern als für die freie Oberfläche charakteristisch anzusehen.

Also: das Reynoldssche Gesetz stellt die Stabilitätsverhältnisse einer Flußströmung nur unvollkommen dar, insofern die kritische Zahl nicht unabhängig vom Reibungskoeffizienten ist.

So befremdlich dieses Resultat auf den ersten Blick erscheinen mag, gibt doch die Theorie die Mittel an die Hand, um wenigstens qualitativ die Ursache zu durchschauen.

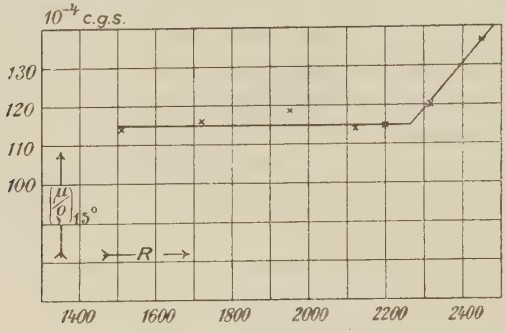


Fig. 16. *Glasröhre. Wasser.*

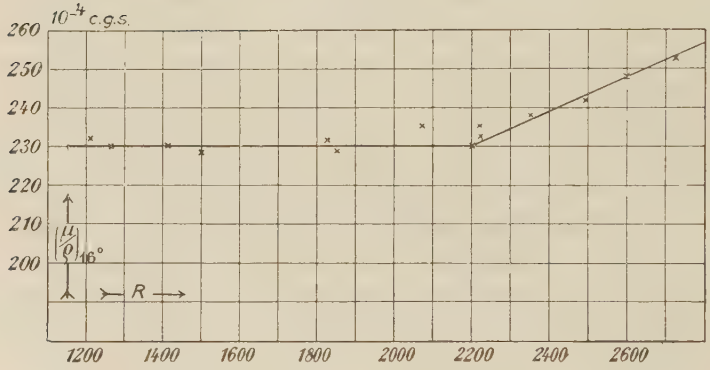


Fig. 17. *Glasröhre. Zuckerlösung I.*

Denn das Reynoldssche Gesetz ruht ganz auf einer einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung. Vergleicht man die Dimensionen der einzelnen in der Differentialgleichung stehenden Ausdrücke, so ergibt sich, daß zwei Strömungen als ähnlich betrachtet werden können, wenn sie die gleiche Reynoldssche Zahl R besitzen. Die Grenzbedingungen sagen bei einer beliebigen zwischen festen Wänden verlaufenden Strömung nichts weiter aus, als daß an den Wänden Tangential- und Normalgeschwindigkeit verschwinden müssen, Sie liefern daher keine neue reine Zahl und fallen für die Dimensionsbetrach-

tung nicht ins Gewicht. Gerade dieses Umstandes wegen ist die Reynoldssche Zahl die einzige für derartige Strömungen charakteristische Größe, so daß sie allein auch z. B. für die Gültigkeitsgrenzen des Poiseuilleschen Gesetzes entscheidend ist. Obige Messungen an Röhren bestätigen das wieder in weitgehender Weise. Man beachte nur, wie verschieden die Größe der mittleren Geschwindigkeiten an der kritischen Grenze (vgl. Tabelle p. 25) ist, daß diese um 70 Proz. differieren und daß sich trotzdem die Konstanz der Reynoldsschen Zahl bis auf etwa 4 Proz. bewährt.

Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse bei einem Flusse. Auch hier liefern die Grenzbedingungen am Grund und diejenige, welche Verschwinden des Tangentialdruckes an der Oberfläche verlangt, nichts Neues. In der Grenzbedingung aber, welche Verschwinden des Normaldruckes auf die Oberfläche fordert, tritt eine neue charakteristische Zahl auf. Für stationäre Strömung und unendliche Breite geschrieben, lautet diese Bedingung

$$g\varrho\cos\alpha\,.\,\eta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial\eta} - T\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,$$

wenn η die Erhebung über die glatte Oberfläche, T die Kapillaritätskonstante bedeutet, und die Krümmung der Oberfläche näherungsweise $= d^2\eta/dx^2$ gesetzt wird, wie es ja bei Wellenbetrachtungen stets geschieht.[1])

Diese Grenzbedingung ergibt kein Dimensionskriterium im Falle einer glatten ungewellten Oberfläche, und würden wirklich an der Oberfläche keine Wellen auftreten, so müßte das Reynoldssche Gesetz für Flüsse ebensogut erfüllt sein, wie für Strömungen zwischen festen Wänden. Im Falle einer Wellung dagegen darf man zwei Strömungen mit gleicher Reynoldsscher Zahl noch nicht als ähnliche Strömungen ansehen, da die Oberflächenbedingung für wirklich ähnliche Zustände eine weitere Dimensionsgleichheit fordert, welche besonders durch die der Differentialgleichung ganz fremde Größe T der Kapillarität bestimmt wird.

1) Die obige Gleichung (4) geht aus dieser Gleichung hervor, wenn man parallele Stromfäden ($v = 0$) annimmt.

Nun muß aber beim Einsatz der turbulenten Bewegungen eine Wellung in der Flüssigkeit entstehen, welche auch die Oberfläche zu stören trachtet und so die Kapillarität, welche auf verschiedene Wellenlängen verschieden wirkt, in Mitleidenschaft ziehen muß. In Dimensionen geschrieben lautet obige Gleichung:

$$[\varrho\, v^2] = \left[\mu \frac{v}{l}\right] = \left[\frac{T}{l}\right]$$

und ergibt außer der Reynoldsschen Zahl R noch die charakteristische Zahl:

$$S = \frac{\mu\, v}{T}.$$

Leider läßt es sich doch nicht ganz einwandfrei feststellen, daß gerade die Änderung dieser Zahl die Abweichung vom Reynoldsschen Gesetze verursacht. Zwar ist es physikalisch gewiß plausibel, daß Vergrößerung der Kapillarität die Verhältnisse denen einer mitbewegten festen Wand an der Oberfläche zu nähern strebt und so stabilisierend wirkt, und die Versuche an den Zuckerlösungen zeigen in der Tat eine Verringerung der Stabilität bei wachsendem μ, d. i. bei wachsendem S. Doch ist die entsprechende Einwirkung wachsender mittlerer Geschwindigkeit im instabilisierenden Sinn nicht zu konstatieren, also eine einfache Dimensionsbetrachtung nicht durchführbar.

Der Grund dafür kann nur darin liegen, daß wir das v der Dimensionsbetrachtung mit dem u der Differentialgleichung identifizierten. Das ist nicht mehr zulässig, sobald an der Oberfläche Wellungen auftreten, und dadurch neue Längen und Geschwindigkeiten ins Spiel kommen.

§ 5. Die Oberflächenwellen auf dem Flusse.

Wie schon eingangs erwähnt, war es eine der verlockendsten Aussichten bei den geschilderten Experimenten, daß die freie Oberfläche eines Flusses etwas von den turbulenten Bewegungen zu zeigen und so einen Einblick in deren Mechanismus (Wellenlänge, Amplitude usw.) zu gestatten versprach. In der Tat schienen die Experimente dieser Erwartung entgegen

zu kommen. Bei geringer Ausflußmenge beobachtete man eine ganz glatte Oberfläche, die nur durch kleine zufällige Erhebungen am Rande gestört war; die zurückgeworfenen Bilder wiesen keine merklichen Unregelmäßigkeiten auf. Wurde die Ausflußmenge vergrößert, so zeigten sich regelmäßige stehende Wellen auf der Oberfläche, deren Kämme, vom Rande ausgehend, zunächst etwa senkrecht zur Stromrichtung verliefen, dann bei weiter gesteigerter Ausflußmenge ihre Neigung gegen die Stromrichtung verkleinerten, bei stets abnehmender Wellenlänge. In

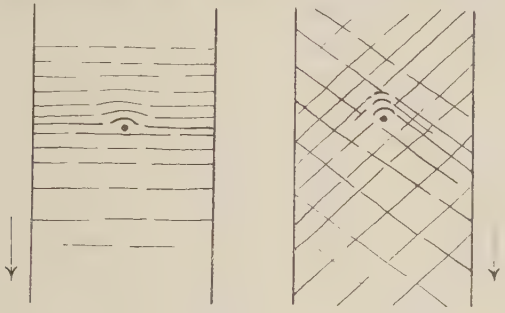
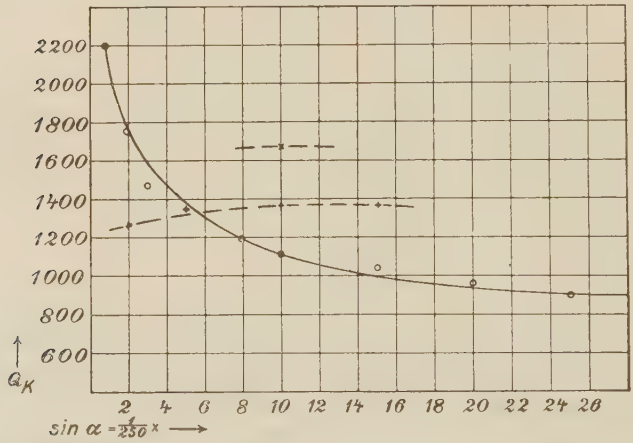


Fig. 18.

Fig. 18 ist das flüchtig skizziert. Von einer gewissen Ausflußmenge an waren die Änderungen in der Neigung der Wellenkämme sowohl, wie in der Wellenlänge unmerklich klein. Die erste sichtbare Wellenlänge war um so größer, je kleiner das Gefälle war. Ein entsprechendes Bild zeigte sich auch in der Umgebung einer Störung an der Oberfläche, z. B. der aufgesetzten Schraubenspitze und (allerdings nicht so deutlich) an einer Störung am Grund des Flusses, einer Luftblase oder dgl. Die Wellen um eine solche Störung waren bei kleiner Oberflächengeschwindigkeit so stark örtlich gedämpft, d. h. um das Hindernis herum lokalisiert, daß überhaupt nur eine kleine Erhebung der Oberfläche an der Vorderseite des Hindernisses zu sehen war. Bei großer Ausflußmenge dagegen zeigte sich ein schönes Schiffswellengitter, das dem Kapillarwellengitter der reibungslosen Hydrodynamik im wesentlichen ähnlich war.[1]) Der Über-

1) Diese Beobachtungen waren die erste Veranlassung zu der beigegebenen Arbeit über Schiffswellen. Ich hoffte damals, sie in innigeren Zusammenhang mit dem Turbulenzproblem bringen zu können.

gang der ganz glatten Oberfläche in eine gewellte war natürlich kein ganz plötzlicher, doch ließ sich der kritische Punkt, an welchem das Aussehen sich sehr schnell veränderte, durch Beobachten einmal des merklichen Erlöschens und einmal des nachweisbaren Einsetzens der Wellen in ziemlich enge Grenzen einschließen. So lag die Vermutung sehr nahe, daß der kritische Punkt, an welchem die Reibung nicht mehr imstande ist, den Trägheitskräften zu widerstehen, sich durch den Einsatz der Wellen an der Oberfläche kund gebe. Diese Vermutung bestätigte sich aber durchaus nicht. Das zeigte sich am ein-



○ Ausflußmenge, bei welcher die Oberflächenwellen merklich werden.
+ Ausflußmenge, bei welcher Wasser turbulent zu fließen beginnt.
× Ausflußmenge, bei welcher Zuckerlösung I turbulent zu fließen beginnt.

Fig. 19.

fachsten darin, daß durch Änderung des Gefälles ein vorhandenes Wellengitter zum Verschwinden gebracht werden konnte, während doch die Reynoldssche Instabilität nicht vom Gefälle abhängt. Fig. 19 gibt davon ein Bild. Als Funktion des Gefälles ist dort die Ausflußmenge pro Minute aufgetragen, in deren Umgebung das Oberflächenbild aus dem glatten in den gewellten Zustand übergeht, und zwar gelten diese Punkte ebensowohl für Wasser wie für Zuckerlösung. Dazu sind die Ausflußmengen angegeben, die der kritischen Reynoldsschen

Zahl entsprechen. Man sieht, daß die beiden kritischen Werte durchaus voneinander unabhängig sind, daß einesteils die Oberfläche eines Flusses ganz von Wellen durchzogen sein kann, ohne daß doch Formel (3) innerhalb der Fehlergrenze zu gelten aufhört, wie es bei einer Neigung $> 5/250$ der Fall ist, und daß andererseits, wie z. B. bei Wasser vom Gefälle $2/250$, auch im Innern der Flüssigkeit schon starke turbulente Bewegungen vor sich gehen können, ohne daß an der Oberfläche das geringste zu sehen wäre. Die Hoffnung, an dem Flusse direkt durch den Augenschein etwas über den Mechanismus der Turbulenz zu erfahren, muß also als gescheitert angesehen werden.[1])

Es bot sich nun aber weiterhin das Problem, über die Oberflächenwellen selbst Klarheit zu gewinnen, und ihren möglichen Einfluß auf die im vorigen Paragraphen besprochenen Abweichungen vom Reynoldsschen Gesetz zu untersuchen.

Die exakte Berechnung der Wellen, d. i. der unendlich kleinen periodischen Schwingungen auf einem Flusse mit Reibung, ist ein Problem von sehr großer Schwierigkeit, identisch mit dem Turbulenzproblem selbst, das bisher ja der mathematischen Analyse vollkommen widerstanden hat. Da die Wellen aber keinen direkten Zusammenhang mit der Turbulenz zeigten, schien es mir wahrscheinlich, daß die einfache Theorie der Wellen auf ruhendem Wasser Aufschluß geben würde. Die vollständige exakte Behandlung dieses Problems mit Berücksichtigung der endlichen Tiefe und der Reibung fand ich nirgends in der Literatur[2]); ich will daher die Rechnung im Anhang 4 mitteilen.

Von den dort abgeleiteten Resultaten ist hier von Wichtigkeit, daß der Grenzübergang verschwindender Reibung die Formeln der reibungslosen Hydrodynamik liefert, und daß in allen bei Wasser in Betracht kommenden Fällen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nur durch Schwere und

1) Über einige hier anknüpfende Experimente über Strahlzuckungen ist im Anhang 3 referiert.

2) In W. Wiens Hydrodynamik, p. 283, Gleichung (73) sind nur 2 Konstanten eingeführt, anstatt 3, wie die Anzahl der Grenzbedingungen erfordern würde.

Kapillarität, ihre Dämpfung nur durch die Reibung bestimmt wird.

Wenden wir diese Resultate auf unsern Fluß an, so haben wir das folgende Problem: Gegeben ist die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses an seiner Oberfläche als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Gibt dann der aus der Theorie der Wellen auf ruhendem Wasser gewonnene Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Länge, Dämpfung usw. der Wellen Aufschluß über die beobachteten Phänomene?

Das Nächstliegende ist, von der Reibung abzusehen und an eine Minimalgeschwindigkeit zu denken, wie sie Kelvin bei den Kapillar-Schwere-Wellen nachgewiesen hat. Kelvin hat aber nur eine für unendliche Tiefe gültige Formel aufgestellt; wir müssen zur allgemeinen Formel (21) im Anhang 4 für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer Störung von Wellenlänge $2\pi/\alpha$

$$v = \sqrt{\frac{g\varrho + T\alpha^2}{\varrho\,\alpha}\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\alpha h}$$

zurückgreifen und das Kelvinsche Kriterium auf den Fall endlicher Tiefe übertragen. Ich will nur das Resultat der Rechnung mitteilen, da es ohne Schwierigkeiten erhalten werden kann. Der Kelvinsche Wert der Minimalgeschwindigkeit

$$v^2 = 2\sqrt{\frac{Tg}{\varrho}}, \quad \text{also} \quad v = 23{,}3\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

gilt nur, wenn

$$h \gg \sqrt{\frac{T}{g\varrho}} = \text{etwa } {}^1\!/_3 \text{ cm},$$

was bei obigen Experimenten nie der Fall war.

Die entgegengesetzte Näherung — αh klein — gilt bis etwa dahin (d. h. für den Fall $h \ll 2\sqrt{T/g\varrho}$) und ergibt eine Minimalgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{g h \left(\tfrac{2}{3}\,\frac{g\varrho}{T}\,h^2 - 1\right)},$$

also eine fast im ganzen Gültigkeitsbereich imaginäre Größe. Infolgedessen führt der Kelvinsche Weg zu keiner Erklärung unserer Versuchsergebnisse.

Auch die Vermutung, es handle sich um die für alle Wellenphänomene bedeutungsvolle Geschwindigkeit $\sqrt{g\,h}$, bestätigte sich nicht. Die Wellen setzten auf dem Flusse erst bei einer Oberflächengeschwindigkeit ein, bei welcher sie ausschließlich unter Wirkung der Kapillarität stehen konnten.

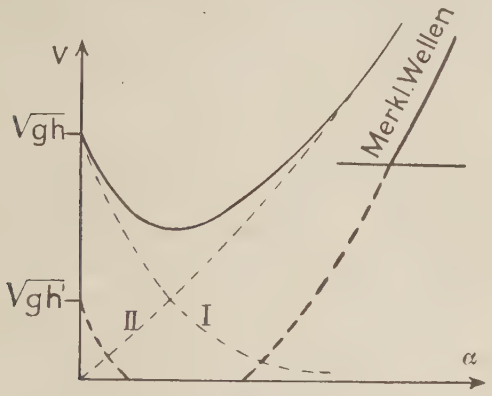


Fig. 20. I Schwerewellen. II Kapillarwellen.

In Fig. 20 ist dies kurz veranschaulicht. Dort ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Funktion der reziproken Wellenlänge aufgetragen. Man sieht, daß eine Minimalgeschwindigkeit bei kleiner Tiefe h' nicht auftritt. Zur Beobachtung kamen nur Wellen, die ihren Platz im Diagramm auf einer solchen Kurve ohne Minimum bei $v > \sqrt{g\,h'}$ haben.

Man muß also den Schluß ziehen, daß obige Betrachtungen nicht ausreichen, um über die Beobachtungen der Wellengitter auch nur qualitativ Aufschluß zu geben. Es wird dazu unbedingt nötig sein, das exakte Problem der kleinen Schwingungen auf einem reibenden Flusse zu diskutieren.

§ 6. Zusammenfassung.

Die Resultate der Untersuchung seien schließlich noch übersichtlich zusammengestellt:

1. Es wurde ein Idealfluß von geringer Tiefe hergestellt, in welchem die Strömung nicht mehr, wie bei wirklichen

Flüssen „hydraulisch“ vor sich ging, sondern, von der Reibung beherrscht, die einfachen hydrodynamischen Gesetze befolgte.

2. Es bestätigte sich in erster Näherung auch hier, das von anderen Strömungen (in Röhren usw.) her bekannte Reynoldssche Gesetz, wonach absolute Werte der Geschwindigkeit, Tiefe, Reibung usw. für den Verlauf der Strömung nicht maßgebend sind, sondern nur die sogenannte Reynoldssche Zahl

$$R = \frac{\varrho\, \bar{v}\, l}{\mu}.$$

Bei kleinem R befolgt die Strömung die einfachen hydrodynamischen Gesetze, d. h. sie verläuft laminar, bei großem R treten die sogenannten turbulenten Bewegungen auf, welche für den „hydraulischen“ Zustand charakteristisch sind. Der Übergang von einem Zustand in den anderen läßt sich ungezwungen als sprunghaft, d. i. durch einen Knick in den Beobachtungskurven darstellen. Trotz der großen Unsicherheit der Tiefenmessung konnte die kritische Reynoldssche Zahl R_k, bei welcher der Sprung erfolgt, durch Mittelung auf wenige Prozent genau angegeben werden. Sie liegt etwa bei 300.

3. Eine Abhängigkeit der Größe R_k von Material und Rauhigkeitsgrad der Grundfläche konnte nicht konstatiert werden.

4. Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz bewährt sich innerhalb der Genauigkeitsgrenzen bei Änderung des Gefälles, die gleichbedeutend ist mit einer Änderung der Geschwindigkeit oder der Tiefe.

5. Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz bewährt sich nicht bei Anwendung von verschieden stark reibenden Flüssigkeiten. Hier wurden Abweichungen bis zu 25 Proz. gefunden, während bei entsprechenden Experimenten an Röhren die Differenz der kritischen Zahlen nur etwa 3 Proz. betrug.

Bei freier Oberfläche erfolgt die Abweichung in der Richtung, daß ceteris paribus R_k sinkt mit wachsendem Reibungskoeffizienten.

6. Daß solche Abweichungen auftreten, ist theoretisch leicht verständlich, da durch eine Grenzbedingung an der freien Oberfläche neue, für die Strömung charakteristische Zahlen ins Spiel kommen, welche bei Strömungen zwischen festen

Wänden nicht auftreten, besonders durch die den Differentialgleichungen ganz fremde, für die freie Oberfläche aber sehr wichtige Größe der Kapillarität. Warum man das Ähnlichkeitsgesetz mit Rücksicht auf die Kapillarität nicht einwandfrei erweitern kann, wird in § 4 auseinandergesetzt.

7. Die Verhältnisse werden stark kompliziert durch die auf der Flußoberfläche auftretenden Wellen. Diese sind vom Turbulenzphänomen ganz unabhängig und verwehren eine direkte Beobachtung der turbulenten Bewegungen durch Augenschein. Die Gesetze, denen sie gehorchen, weichen von den für Wellen auf ruhendem Wasser berechneten erheblich ab.

Einige nicht direkt zum Turbulenzproblem gehörige interessante Nebenresultate enthält der Anhang.

Wenden wir uns schließlich noch einmal dem Hauptproblem der Turbulenz zu, so sehen wir, daß durch die vorliegenden Experimente zwar eine Lücke in dem vorhandenen Material ausgefüllt und das im großen Ganzen ähnliche Verhalten der Flußströmung mit anderen Strömungen dargetan wird, daß aber auch diese Untersuchnng, wie die anderen, mit einem großen Fragezeichen schließen muß. Das Turbulenzproblem ist im Grunde ein theoretisches und kein geringeres als das der allgemeinen Gültigkeit unserer hydrodynamischen Theorie. Daß die Hoffnung, bei freier Oberfläche direkte Beobachtungen über den Verlauf turbulenter Bewegungen machen zu können, zu Schanden wurde, verweist das Problem um so energischer an die Entscheidung der mathematischen Analyse.

Die klassische Methode der Stabilitätsuntersuchungen, die Methode der unendlich kleinen Schwingungen, ist durch Kelvins Arbeit nicht erschöpft; vielleicht läßt sich doch noch auf diesem Wege entscheiden, ob das paradoxe Resultat Kelvins, wonach die laminare Strömung unter keinen Umständen ohne endliche Energiezufuhr zu erschüttern wäre, aufrecht erhalten werden muß, oder ob Reynolds Anschauungen von der Instabilität der laminaren Strömung bestätigt werden können.

Anhang.

1.[1])

Berechnung der Ausflußmenge eines reibenden Flusses von endlicher Breite.

Zu lösen sind Differentialgleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mu\,\Delta u = -\varrho\, g \sin\alpha\,, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\varrho\, g \cos\alpha\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \end{cases}$$

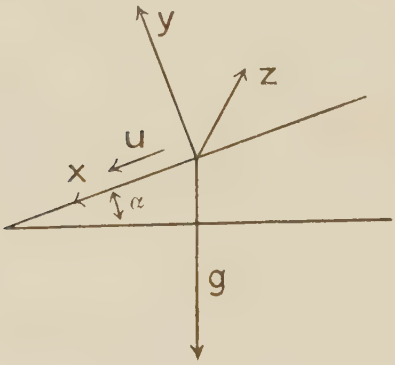


Fig. 3.

Dazu die Grenzbedingungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} u = 0 \quad \text{für} \quad y = 0\,, \\ u = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm b\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = h\,, \\ p = 0 \quad \text{für} \quad y = h\,. \end{cases}$$

Für den Druck ergibt sich ohne weiteres:

$$(3)\qquad p = \varrho\, g \cos\alpha\,(h - y)\,.$$

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit:

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\varrho\, g \sin\alpha}{\mu} = c$$

1) Zu p. 10.

lösen wir durch einen Ansatz, welcher die Grenzbedingungen an den Seitenwänden erfüllt:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{x}{b} (2n+1) \frac{\pi}{2} f_n(y).$$

Die Konstante c können wir über die Flußränder beiderseits hinaus in beliebiger Weise fortsetzen, und wir tun das so, daß wir für c eine Fourierreihe erhalten, deren halbe Periode die Flußbettbreite ist:

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4c}{(2n+1)\pi} \cos(2n+1) \frac{x}{b} \frac{\pi}{2}.$$

Einsetzen in (4) ergibt für $f_n(y)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2} - k_n^2 f_n = l_n, \tag{5}$$

wobei

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$$

und

$$l_n = (-1)^n \frac{4c}{(2n+1)\pi}.$$

Daraus bei Weglassung der Indizes:

$$f = -\frac{l}{k^2} + A e^{ky} + B e^{-ky}.$$

Die beiden noch übrigen Grenzbedingungen bestimmen A und B durch die Gleichungen:

$$A + B = \frac{l}{k^2},$$

$$A e^{kh} - B e^{-kh} = 0$$

oder:

$$A = \frac{l}{k^2} \frac{1}{1+e^{2kh}}, \quad B = \frac{l}{k^2} \frac{e^{2kh}}{1+e^{2kh}},$$

also:

$$f = \frac{l}{k^2} \left(\frac{\mathfrak{Cof}\, k(y-h)}{\mathfrak{Cof}\, kh} - 1 \right). \tag{6}$$

So erhalten wir schließlich die Geschwindigkeitsverteilung:

$$(7)\quad u = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{16\, b^2\, c}{(2n+1)^3\, \pi^3} \left(\frac{\mathfrak{Cof}\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{y-h}{b}\right\}}{\mathfrak{Cof}\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{h}{b}\right\}} - 1 \right) \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{b},$$

ein schon von Graetz[1]) und von Greenhill[2]) angegebenes Resultat. Die gesuchte Ausflußmenge wird

$$Q = \int_0^h \int_{-b}^{+b} u\, dy\, dz = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{2b^2 c}{\nu^3} \left(\frac{b}{\nu} \mathfrak{Tg}\, \nu \frac{h}{b} - h \right) \cdot \frac{2b}{\nu} (-1)^n,$$

wobei zur Abkürzung $\nu = (2n+1)\pi/2$ gesetzt ist;

$$(8)\qquad Q = 4b^4 c \left\{ \sum_0^\infty \left(\frac{1}{\nu^5} \mathfrak{Tg}\, \nu \frac{h}{b} \right) - \frac{h}{b} \sum_0^\infty \frac{1}{\nu^4} \right\}.$$

Wir haben die Summe auszurechnen:

$$\sum \frac{1}{\nu^4} = \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{16}{\pi^4} = \frac{1}{6}.$$

Bei der anderen Summe treten Schwierigkeiten auf, denn die Potenzreihenentwickelung des $\mathfrak{Tg}$ führt zu nichtkonvergenten Summen; man kann aber in folgender Weise vorgehen[3]):

$$\mathfrak{Tg}\, \nu \frac{h}{b} = 2\nu \frac{h}{b} \sum_0^{\infty(\mu)} \frac{1}{\mu^2 + \frac{\nu^2 h^2}{b^2}}, \quad \text{wobei} \quad \mu = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\nu \frac{h}{b} \sum_0^{\infty(\mu)} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \cos \frac{h}{b} \nu t\, dt,$$

$$(9)\qquad \sum_0^{\infty(\nu)} \frac{1}{\nu^5} \mathfrak{Tg}\, \nu \frac{h}{b} = 2 \frac{h}{b} \sum_0^{\infty(\mu)} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \sum_0^{\infty(\nu)} \frac{\cos \frac{h}{b} \nu t}{\nu^4}\, dt.$$

---

1) Graetz, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **25.** 1880.

2) Greenhill, Lond. Math. Soc. Proc. **13.** 1881.

3) Vgl. Debye, „Wirbelströme in Stäben von rechteckigem Querschnitt", Zeitschr. f. Math. u. Phys. **54.** p. 418. 1906.

Nun ist:

$$\sum_0^\infty{}^{(\nu)} \frac{\cos\frac{h}{b}\nu t}{\nu^4} = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{b}t\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{b}t\right)^2 + \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad 0 < t < \frac{2b}{h}$$

$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{h}{b}t\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{h}{b}t\right)^2 - \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad \frac{2b}{h} < t < \frac{4b}{h}$$

usw.,

wie man leicht durch mehrfache Integration der Identität:

$$\sum_0^\infty{}^{(n)} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

zwischen den Grenzen Null und x erweisen kann.

Es ist klar, daß bei Ausführung der Integration über t nur die von der Grenze Null herrührenden Glieder in Betracht kommen, da die übrigen mindestens wie $e^{-2\frac{h}{b}}$ verschwinden, d. i. im Falle der folgenden Experimente rund e^{-50}, also praktisch Null. Es bleibt also übrig:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \sum_0^\infty{}^{(\nu)} \frac{\cos\nu\frac{h}{b}t}{\nu^4}\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{4}\frac{2}{\mu^4}\left(\frac{h}{b}\right)^2 + \frac{1}{12}\frac{6}{\mu^5}\left(\frac{h}{b}\right)^3.$$

In (9) eingesetzt:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{\nu^5}\,\mathfrak{Tg}\,\nu\frac{h}{b}$$

$$= \frac{2h}{b}\left\{\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^4}{96}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{\pi^5}\sum_0^\infty{}^{(n)}\frac{1}{(2n+1)^5}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^3\right\}.$$

Durch Einsetzen in (8) erhalten wir schließlich die Ausflußmenge pro Sekunde:

$$Q = -\frac{2}{3}c\,b\,h^3 + 0{,}42\,c\,h^4,$$

da

$$\frac{32}{\pi^5}\cdot\sum_0^\infty{}^{(n)}\frac{1}{(2n+1)^5} = 0{,}105$$

oder

(10) $$Q = \frac{2}{3}\frac{g\varrho\sin\alpha}{\mu}\,b\,h^3\left(1 - 0{,}63\frac{h}{b}\right).$$

2.[1])

Berechnung der Oberflächenform unter Einwirkuug der Kapillarität.

Die zu lösende Differentialgleichung ist

$$-T\frac{d\varphi}{ds}+g\varrho\cos\alpha\, y=0. \tag{11}$$

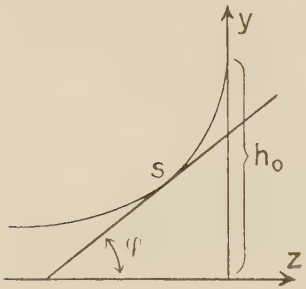


Fig. 6.

Da

$$\cos\varphi=\frac{dx}{ds},\quad \sin\varphi=\frac{dy}{ds},$$
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx},$$

können wir dieser die einfache Form geben:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}-k^2\sin\varphi=0,$$

wobei

$$k^2=\frac{g\varrho\cos\alpha}{T};$$

daraus:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=C-2k^2\cos\varphi.$$

Bei unendlicher Breite — und als solche konnte ich meine Flußbreite ansehen — wird für $\varphi=0$ die Krümmung $=0$, also

$$C=2k^2.$$

Als neue Variable führen wir $z'=b-z$ ein, und erhalten:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2k^2(1-\cos\varphi)}}=ds.$$

Hieraus:

$$-z'=\int_\gamma^\varphi\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2k^2(1-\cos\varphi)}},$$

$$-(h_0-y)=\int_\gamma^\varphi\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2k^2(1-\cos\varphi)}},$$

wobei γ das Komplement des Randwinkels bezeichnet.

1) Zu p. 15.

Führen wir weiter als neue Variable $\psi = \varphi/2$ ein, so wird:

$$z' = \frac{1}{k}\int_{\gamma/2}^{\varphi/2} \frac{d\psi}{\sin\psi} - \frac{2}{k}\int_{\gamma/2}^{\varphi/2} \sin\psi\, d\psi\,,$$

$$h_0 - y = -\frac{2}{k}\int_{\gamma/2}^{\varphi/2} \cos\psi\, d\psi\,.$$

Ausgerechnet:

$$(12)\quad \begin{cases} z' = \frac{1}{k}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} - \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}\right) + \frac{2}{k}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right), \\ h_0 - y = \frac{2}{k}\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right). \end{cases}$$

Übrigens ist dies nur eine andere Form des bekannten Resultates, vgl. z. B. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität, 3. Kapitel, § 1.

3.[1])

Experimente über Strahlzuckungen.

Nachdem sich gezeigt hatte, daß die Oberflächenwellen beim Flusse mit dem Turbulenzvorgang nichts zu tun haben, kamen mir auch Bedenken gegen eine andere Erscheinung, welche den Oberflächenwellen verwandt schien und welche doch immer als Turbulenzerscheinung gedeutet worden war, nämlich die Strahlzuckungen. Läßt man aus einer Röhre, durch welche äußerer Druck eine Flüssigkeit treibt, den Strahl frei austreten, so bietet sich bei kleiner Reynoldsscher Zahl das einfache Bild eines glatten Strahles, der bei gesteigertem Druck einen immer weiteren Bogen beschreibt. Bei einem ganz bestimmten Druck jedoch verändert sich das Bild mitunter, der Strahl zuckt plötzlich, und beschreibt einen Moment lang einen kürzeren Bogen, wobei seine Oberfläche gerieft erscheint. Im nächsten Augenblick bietet er wieder das frühere Bild. Diese Zuckungen häufen sich bei steigendem Druck; schließlich behält der gerieft Strahl die Oberhand, der glatte kommt nur manchmal noch auf kurze Augenblicke zum Vor-

1) Zu p. 31.

schein, um zuletzt ganz zu verschwinden. Da auch beim Strahl die Kapillarität eine hervorragende Rolle spielen muß, schien mir zunächst die Deutung dieser Erscheinung als Turbulenzerscheinung bedenklich, doch überzeugte ich mich durch Messung der Reynoldsschen Zahl an einigen Röhren, daß die Zuckungen wirklich gerade da einsetzen, wo Druck und Ausflußmenge aufhören in linearem Verhältnis zu stehen, also an der kritischen Stelle im Reynoldsschen Sinn (Fig. 21).

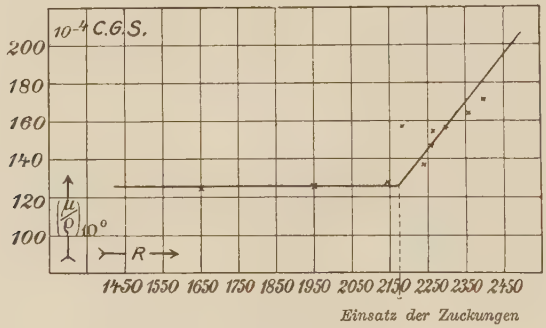


Fig. 21. *Glasröhre. Wasser.*

Beim Flusse waren derartige Zuckungen nicht zu beobachten, da der Strahl durch den Messingansatz an der Rinne in die Vertikale geleitet war. Da also die Strahlzuckungen das beste Bild dessen bieten, was bei Einsatz der turbulenten Bewegungen vorgeht, zudem das simultane Auftreten zweier Arten von Strömung etwas sehr Befremdliches an sich hat, versuchte ich durch Registrieren der Strahlen mittels eines Morseapparates festzustellen, ob Gesetzmäßigkeiten bei diesen Zuckungen auftreten oder nicht. Das Resultat entschied, wie ja zu erwarten war, gegen jede Regelmäßigkeit. Mitunter erfolgten mehrere Zuckungen hintereinander, mitunter war etwa eine halbe Minute lang nichts zu sehen. Soviel war jedenfalls ganz deutlich zu erkennen, daß bei kleiner Reynoldsscher Zahl der glatte Strahl allein als wirklich stabil gelten konnte, weil der geriefte, kürzere sich immer nur einen Augenblick behaupten konnte, und daß bei größerer Zahl das Umgekehrte eintrat. Nur in einem ganz kleinen Zwischengebiet wäre es möglich die beiden Strahlen, die dort ziemlich periodisch,

etwa 70 mal in der Minute, miteinander wechselten, als gleich stabil anzusehen.

4.[1])

Oberflächenwellen auf ruhendem reibenden Wasser von endlicher Tiefe.

Zu lösen sind die Differentialgleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\varrho}\Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - g + \dfrac{\mu}{\varrho}\Delta v, \end{cases}$$

$$(14)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

wobei alle Bezeichnungen wie in § 2 gewählt sind, und nur diesmal aus Bequemlichkeitsgründen $y = 0$ die ungewellte Oberfläche, nicht, wie früher, die Grundfläche bedeuten soll.

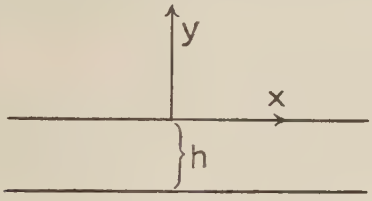


Fig. 22.

Die Kontinuitätsgleichung (14) wird erfüllt durch den Ansatz

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Die Gleichungen (13) fordern dann:

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Pi = \frac{\mu}{\varrho}\Delta\Delta\Pi.$$

Setzen wir Π zeitlich und nach der x-Achse periodisch an, so erhalten wir leicht als vollständige Lösung von (15)

$$(16)\qquad \begin{cases} \Pi = [A\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(y+h) + B\,\mathfrak{Cof}\,\alpha(y+h) \\ \qquad + C\,\mathfrak{Sin}\,\gamma(y+h) + D\,\mathfrak{Cof}\,\gamma(y+h)]\,e^{i(\beta t - \alpha x)}. \end{cases}$$

1) Zu p. 31.

Hierbei bedeuten „Sin“ und „Cof“ die hyperbolischen Funktionen, und für γ gibt die Differentialgleichung (15):

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \frac{i\beta\varrho}{\mu}}.$$

Wir haben vier willkürliche Konstanten, welche durch zwei Grenzbedingungen am Grund und zwei an der Oberfläche zu bestimmen sind: Die Verhältnisse B/A, C/A, D/A und die zeitliche Frequenz β. An der Grundfläche müssen die beiden Strömungskomponenten verschwinden, also

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad y = -h.$$

Dies ergibt:

$$D = -B, \quad C = -\frac{\alpha}{\gamma} A.$$

Die Gestalt der Oberfläche wird dadurch bestimmt, daß dort die Normalgeschwindigkeit des Wassers gleich der Normalgeschwindigkeit der Oberfläche selbst sein muß, also

$$y_0 = \int v\, dt,$$

$$y_0 = \frac{\alpha}{\beta}\left[A\left\{\mathfrak{Sin}\,\alpha h - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{Sin}\,\gamma h\right\} + B\left\{\mathfrak{Cof}\,\alpha h - \mathfrak{Cof}\,\gamma h\right\}\right] e^{i(\beta t - \alpha x)},$$

wenn die Erhebung y_0 über das Niveau der glatten Oberfläche gegen die Tiefe h weggestrichen wird.

Die beiden Grenzbedingungen an der Oberfläche verlangen das Verschwinden des Normal- und Tangentialdruckes und lauten:

$$-p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - T\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

wobei T die Kapillarkonstante bedeutet und im Ausdruck für die Krümmung dieselbe Vernachlässigung gemacht wurde wie in § 4. Ferner:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Die Differentialgleichungen (13) ergeben für den Druck:

$$p = -g\varrho y + \varrho\beta\left[A\,\mathfrak{Cof}\,\alpha h + B\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h\right] e^{i(\beta t - \alpha x)},$$

und man erhält nach einigen einfachen Umrechnungen die beiden Gleichungen:

$$
(17)\quad \begin{cases} A\Big[-\varrho\beta\,\mathfrak{Cof}\,\alpha h + (\varrho g + T\alpha^2)\frac{\alpha}{\beta}\Big(\mathfrak{Sin}\,\alpha h - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{Sin}\,\gamma h\Big) \\ \qquad\qquad + 2i\mu\alpha^2(\mathfrak{Cof}\,\alpha h - \mathfrak{Cof}\,\gamma h)\Big] \\ + B\Big[-\varrho\beta\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h + (\varrho g + T\alpha^2)\frac{\alpha}{\beta}(\mathfrak{Cof}\,\alpha h - \mathfrak{Cof}\,\gamma h) \\ \qquad\qquad + 2i\mu\alpha(\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h - \gamma\,\mathfrak{Sin}\,\gamma h)\Big] = 0 \\ \text{und} \\ A\Big[2\alpha^2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h - \frac{\alpha}{\gamma}(\gamma^2+\alpha^2)\,\mathfrak{Sin}\,\gamma h\Big] \\ + B\,[2\alpha^2\,\mathfrak{Cof}\,\alpha h - (\gamma^2+\alpha^2)\,\mathfrak{Cof}\,\gamma h] = 0\,. \end{cases}
$$

Die Gleichungen (17) ergeben durch Elimination des Verhältnisses A/B eine Gleichung zwischen α und β, die den zeitlichen Verlauf einer periodischen Störung von der Wellenlänge $2\pi/\alpha$ vollkommen beschreibt.

Die Resultate der Diskussion in den wichtigsten Grenzfällen sollen hier ohne Ableitung mitgeteilt werden:

Ist die Wellenlänge groß gegen das 2π-fache der Tiefe, so daß αh eine kleine Größe wird, so ergibt Vernachlässigung der 3. Potenzen von αh die Beziehung:

$$
(18)\quad \varrho(i\beta)^2 + i\beta\,.\,\frac{2\mu}{h^2}\Big(1 + \frac{5}{2}\alpha^2 h^2\Big) + (\varrho g + T\alpha^2)\alpha^2 h = 0\,.
$$

Dies ist die charakteristische Gleichung für ein freischwingendes System, das durch seine Trägheit ϱ in Schwingung gehalten, durch die Reibung gedämpft wird, und in welchem Schwere und Kapillarität die Rolle der Direktionskraft spielen.

Im Gültigkeitsgebiet dieser Formel könnten wir noch drei Untergebiete unterscheiden; im ersten hätten wir aperiodisches Abklingen, im zweiten eine von der Reibung abhängige Fortpflanzungsgeschwindigkeit, im dritten die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur abhängig von der Direktionskraft. Die ersten beiden Gebiete sind bei Wasser so klein, daß sie keine nähere Beachtung verdienen. Für das dritte Gebiet ist interessant, daß die Wirkungen der Reibung und der Direktionskraft sich so scharf trennen lassen; wir erhalten eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$(19)\qquad \begin{cases} v = \sqrt{g h + \frac{T \alpha^2 h}{\varrho}}, \\ \text{und eine Dämpfung:} \\ \Re e\,(i\beta) = -\frac{\mu}{\varrho h^2}\left(1 + \frac{5}{2}\alpha^2 h^2\right). \end{cases}$$

Für die Größe der Dämpfung spielt also der absolute Wert der Tiefe eine bedeutende Rolle; ein Grund, die kurzen Wellen auf sehr flachem Wasser doch nicht ganz identisch zu behandeln mit den sehr großen Wellen (Flutwellen) auf tiefem Wasser.

Der andere Grenzfall — Wellenlänge klein gegen Tiefe — ist oft behandelt. Wir gelangen auch von unseren Formeln aus zum bekannten Resultat:

$$(20)\qquad \begin{cases} \left(i\beta + \frac{2\mu}{\varrho}\alpha^2\right)^2 + \frac{\varrho g + T\alpha^2}{\varrho}\alpha = \frac{4\mu^2}{\varrho^2}\alpha^3\gamma, \\ \text{speziell für kleines } \mu: \\ i\beta = -\frac{2\mu\alpha^2}{\varrho} \pm i\sqrt{\frac{\alpha}{\varrho}(\varrho g + T\alpha^2)}. \end{cases}$$

Auch hier wirken die äußeren Kräfte nur auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die Reibung nur auf die Dämpfung.

Schließlich sei noch der Grenzfall verschwindender Reibung erwähnt, der auf die bekannte (Airysche) Formel führt:

$$(21)\qquad \frac{\beta}{\alpha} = v = \sqrt{\frac{\varrho g + T\alpha^2}{\varrho\alpha}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha h}.$$

Im Gebiete der Wellenlehre führt dieser Grenzfall also zu denselben Resultaten, wie die Theorie reibungsloser Flüssigkeiten, was in der Hydrodynamik nur sehr selten der Fall ist. Es ist dies der Grund, warum gerade in der Wellenlehre die Theorie im allgemeinen zu so schöner Übereinstimmung mit der Erfahrung gelangt ist.

Über Schiffswellen.

§ 1. Problem und Gedankengang.

Die Gestalt der Wellen, welche ein auf ruhender Wasseroberfläche hinziehendes Schiff begleiten, und der damit zusammenhängende Widerstand, gegen den das Schiff fortwährend Arbeit leistet, sind nicht nur praktisch von großer Bedeutung, sondern bieten auch dem Theoretiker manches interessante Problem. Einige Erscheinungen sind besonders auffällig: z. B. beobachtet man stets ein Wellenbild, das nur hinter dem Schiff herzieht und das darum stets zum Vergleich mit dem Bild eines mit Überschallgeschwindigkeit bewegten Projektils oder eines mit Überlichtgeschwindigkeit bewegten Elektrons herausfordert. Dazu kommt in der Regel das auffallende Bild einer ganz bestimmten und von der Schiffsgeschwindigkeit unabhängigen Neigung der Wellen gegen die Fahrtrichtung, was im geraden Gegensatz zu Erscheinungen, wie das Machsche Phänomen, steht. Auch zeigt der Widerstand, als Funktion der Geschwindigkeit aufgetragen, unter Umständen ein Maximum und Minimum.

Obwohl man sich über die Ursachen dieser Erscheinungen qualitativ Rechenschaft abgelegt hat, so ist doch die Leistungsfähigkeit der hydrodynamischen Theorie auf diesem Gebiete noch lange nicht erschöpft, besonders deshalb nicht, weil bei allen Wellenproblemen auf ruhendem Wasser die weitgehendsten theoretischen Vereinfachungen gemacht werden können, ohne daß man sich allzuweit von der Wirklichkeit entfernt. Die Einwirkung der Reibung ist eine ganz geringe, äußere nicht konservative Kräfte kommen nicht in Frage, wir haben es also nur mit einer inkompressiblen, wirbellosen Flüssigkeit zu tun;

d. h. mathematisch: wir können ein skalares Potential φ einführen, so daß die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = 0.$$

Auch die Wegstreichung der quadratischen Glieder, also die Beschränkung auf sehr kleine Geschwindigkeiten, ruft keinen wesentlichen Fehler hervor, da sie nur verlangt, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen klein sein soll gegen die Phasengeschwindigkeit der Welle; und das ist in der Regel erfüllt.

In dieser Gestalt haben sich vor allem Lord Rayleigh[1]) und Lord Kelvin[2]) mit unserem Problem befaßt und dasselbe im eindimensionalen Fall, d. i. für ein Schiff von unendlicher Breite, vollständig klargestellt. Kelvin[3]) hat auch schon lange ein Bild der Wellen im zweidimensionalen Fall, also bei einem Schiff von endlicher bzw. verschwindender Breite entworfen, aber ohne exakte Ableitung. Diese ließ er erst in seinem vorletzten Lebensjahre folgen[4]), indem er eine Idee Rayleighs ausarbeitete. Da diese letzte Arbeit dem folgenden in mancher Beziehung verwandt ist, müssen wir später noch ausführlich darauf zurückkommen; ebenso auf eine Arbeit von Ekman[5]) über das gleiche Problem.

Ehe wir uns der mathematischen Analyse des Problems zuwenden, die uns eine Zeitlang in sehr formale Betrachtungen führen wird, wollen wir uns zunächst den physikalischen Zusammenhang der ganzen Oberflächenerscheinungen vergegenwärtigen:

Erregen wir an der freien Oberfläche einer wirbellosen Flüssigkeit irgend eine Störung, so bleibt die Energie dieser Störung nicht ganz an der Erregungsstelle, wie es z. B. bei einer Welle, welche der Wind in einem Kornfeld[6]) erzeugt, der Fall ist; sie geht aber auch nicht, wie bei einer Schall-

1) J. W. Rayleigh, Scientific papers II. p. 258. 1883.
2) Lord Kelvin, Math. and phys. papers IV. Art. 29, 35, 37, 39.
3) Lord Kelvin, Popular Lectures III. p. 450—500.
4) Lord Kelvin, Math. and phys. papers IV. Art. 38 §§ 80—95.
5) V. W. Ekman, Arkiv för Matematik, Astronomi ok Fysik, 3. Nr. 11. 1907. Stockholm.
6) O. Reynolds, Scientific papers I. p. 198.

erregung in der Luft, oder wie bei einer elektrischen Erregung im Äther, ganz in die benachbarten Flüssigkeitselemente über. Es besteht vielmehr zwischen den einzelnen Flüssigkeitsteilchen ein Zusammenhang, der sich weder mit einer ganz losen, noch mit einer ganz festen gegenseitigen Bindung vergleichen läßt; der Energiestrom durch irgend eine in der Flüssigkeit ruhende Fläche ist nicht gleich der Energiedichte der Wellen auf dieser Fläche multipliziert mit der Wellengeschwindigkeit; sondern während ein Teil der Erregung durch die Fläche hindurchtritt und im dahinter liegenden Raum weiter wirkt, bleibt ein anderer Teil im davor liegenden Raum zurück. Es ergibt sich also das Bild einer Welle, die immer eine andere nach sich zieht; ein einmaliger Impuls wird zu einem periodischen Vorgang. Diese Erscheinung ist uns ganz vertraut im Falle der Ringwellen, die entstehen, wenn ein Stein ins Wasser geworfen wird.

Die Gesetzmäßigkeit, welche diesen Energieaustausch regelt, ist keine ganz einfache, läßt sich aber analytisch einfach darstellen, wenn wir die Erregung in Fouriers Art in periodische Partialschwingungen zerlegen. Haben wir nämlich ein zeitlich und räumlich periodisches Geschwindigkeitspotential

$$\varphi \sim \sin(k\,x - n\,t),$$

so besteht — wie O. Reynolds[1]) und nach ihm allgemeiner Lord Rayleigh[2]) gezeigt haben — zwischen dem Energiestrom S durch eine Fläche und der Energie E der Wellen, welche in der Zeiteinheit diese Fläche durchkreuzen, die Beziehung

$$\frac{S}{E} = \frac{\text{Gruppengeschwindigkeit}}{\text{Phasengeschwindigkeit}} = \frac{\frac{dn}{dk}}{\frac{n}{k}}.$$

Es kommt also nur auf die Beziehung zwischen den Größen n und k an, und so erscheint das Gesetz des Energieumsatzes als Dispersionsgesetz.

1) O. Reynolds, Scientific Papers **1.** p. 198.
2) J. W. Rayleigh, Scientific Papers **1.** p. 322.

Dies ist der beste Ausgangspunkt für die mathematische Behandlung aller Wellenprobleme. Wir haben also im folgenden zunächst das — aus der Differentialgleichung mit den Grenzbedingungen erhaltene — Dispersionsgesetz anzugeben; dann die durch das Schiff an der Oberfläche hervorgerufene Störung möglichst naturgemäß anzusetzen und als Fouriersches Integral zu schreiben. Die Gestalt der Wasseroberfläche und das Geschwindigkeitspotential erhalten wir daraus unmittelbar in Integralform.

Auf diese Weise sollen in folgendem die Gestalt der Oberfläche und das Geschwindigkeitspotential für ein kreisrundes Schiff angegeben und für die wichtigsten Fälle diskutiert werden. Folgerungen für den von der Wellenbildung herrührenden Teil des Schiffswiderstandes sollen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

§ 2. Allgemeine mathematische Behandlung.

Unsere Differentialgleichung ist, wie schon erwähnt:

$$\Delta \varphi = 0 .$$

Haben wir in der Tiefe $y = -h$ eine feste Wand, so muß dort

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

sein. An der Oberfläche $y = y_0$, zu der nur sehr kleine Werte von y gehören, muß der Druck p verschwinden; dies liefert nach der wohlbekannten Druckgleichung, wenn wir von Kapillarwirkung absehen,

$$g \varrho y_0 - \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 ,$$

Ferner muß die Normalgeschwindigkeit an der Oberfläche gleich der Normalgeschwindigkeit der Oberfläche selbst sein:

$$- \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{y=y_0} = \frac{\partial y_0}{\partial t} .$$

Setzen wir nun — wie es zum Aufbau einer kreisrunden Störung am zweckmäßigsten ist — die Gestalt der Wasseroberfläche als periodische stehende Zylinderwelle an, so er-

halten wir, wenn J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung bezeichnet, die Oberfläche:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} y_0 = C\cos n t\, J_0(k r), \\ \text{das Geschwindigkeitspotential:} \\ \varphi = \dfrac{C g}{n}\sin n t\,\dfrac{\mathfrak{Cof}\, k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\, k h}\, J_0(k r) \\ \text{und den Druck:} \\ p = -g\varrho y + C g \varrho \cos n t\,\dfrac{\mathfrak{Cof}\, k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\, k h}\, J_0(k r), \end{array}\right.$$

wobei n und k durch das „Dispersionsgesetz“ verbunden sind:

$$(2)\qquad n = (g k \mathfrak{Tg}\, k h)^{1/2}.$$

Da unsere Fassung des Problems in der Nähe des Schiffes keine richtigen Resultate liefern kann, ist es auch nicht ohne weiteres klar, welche der obigen Größen den besten Ausgangspunkt für die Fouriersche Entwickelung bildet. Wir müssen einen solchen Anfangszustand fordern, daß entweder der Druck oder das Geschwindigkeitspotential oder die Oberfläche eine unstetige Funktion von r ist. Das Nächstliegende ist wohl, der Oberfläche selbst eine solche Bedingung aufzuerlegen. Später soll dann das so erhaltene Resultat mit dem bei anderer Wahl des Anfangszustandes erhaltenen verglichen werden.

Das Schiff entspricht einer Erniedrigung des Wasserspiegels in einem Kreis vom „Schiffsradius“ a. Wir fordern für $t = 0$

$$Y_0 = \begin{cases} -C & \text{für} \quad r \leqq a, \\ 0 & \text{für} \quad r > a. \end{cases}$$

Allgemein gilt die Besselsche Integraldarstellung[1]):

$$F(r) = \int_0^\infty k\, dk\, J_0(k r) \int_0^\infty \alpha\, F(\alpha)\, J_0(k\alpha)\, d\alpha.$$

In unserem Falle:

$$\int_0^\infty \alpha F(\alpha) J_0(k\alpha)\, d\alpha = -C\int_0^a \alpha\, J_0(k\alpha)\, d\alpha = -\frac{Ca}{k} J_1(k a)\ ^{2})$$

1) Vgl. z. B. N. Nielsen, Zylinderfunktionen § 140.

2) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichung **1.** p. 162 (16).

Also

$$Y_0 = - C a \int_0^\infty dk \cos n t J_0(k r) J_1(k a). \tag{3}$$

Dieser Ausdruck stellt ein System konzentrischer Erhebungen, kurz gesagt, eine „Ringwelle“ dar, welche entsteht, wenn die Wasseroberfläche zur Zeit $t = 0$ die geforderte Gestalt erhält und dann sich selbst überlassen wird. Eine solche Ringwelle geht in jedem Momente vom Schiff aus, und zwar natürlich in jedem Momente von einem anderen, durch die Bewegung des Schiffes bestimmten Punkte der Wasserfläche. Setzen wir solche Ringwellen in unendlicher Zahl in unendlich kurzen Abständen nebeneinander, so erhalten wir eine Störung der Wasseroberfläche, die einem fahrenden Schiffe äquivalent ist.

Bezeichet τ die vergangene Zeit, Q den Ort des Schiffes zur Zeit $t = \tau$, O seinen Ort zur Zeit $t = 0$, P den Aufpunkt, so bewirkt eine zur Zeit τ von Q ausgehende Störung in P zur Zeit $t = 0$ eine Erhebung (s. Fig. 1).

$$d Y = - C_1 a \int_0^\infty dk \cos n \tau J_1(k a) J_0(k r_\tau) d\tau .$$

C_1 hängt außer von C auch von den Konstanten der Schiffsbewegung ab; insbesondere ist es für die Frage des Schiffs-

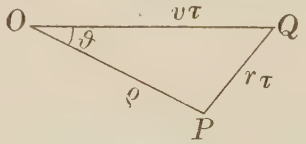


Fig. 1.

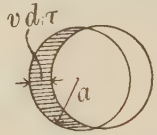


Fig. 2.

widerstandes wichtig, die Abhängigkeit von der Schiffsgeschwindigkeit v zu bestimmen. Soll die unbestimmte Konstante C wieder eine Länge bedeuten, so ist C_1 der Dimension nach gleich C multipliziert mit einer reziproken Zeit. Bedenken wir, daß in Wirklichkeit nicht die ganze Wasserfläche vom Radius a im Momente $d\tau$ sich selbst überlassen wird, sondern nur die durch $v\,d\tau$ gegebene Sichel (vgl. Fig. 2), so ergibt sich als der sinnvollste Ansatz:

$$C_1 = C \frac{v}{a} .$$

Da die einzigen Größen, welche hierbei in Betracht kommen können, v, a und g sind, so könnten wir höchstens noch eine Funktion der Zahl $v^2/g\,a$ hinzusetzen, doch ist die physikalische Notwendigkeit hierzu nicht einzusehen.

Das Bild des stationären Wellengitters, das ein seit unendlicher Zeit in gleichförmiger Fahrt begriffenes Schiff begleitet, wird also dargestellt durch:

$$Y = -\,C v \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d k \cos n\tau\, J_1(k a) J_0(k r_\tau), \tag{4}$$

wobei

$$r_\tau = \sqrt{\varrho^2 + (v\tau)^2 - 2\,\varrho\, v\,\tau \cos\vartheta},$$

wenn ϱ und ϑ Polarkoordinaten sind, die vom augenblicklichen Ort des Schiffes aus gerechnet werden.

Dementsprechend wird nach (1) das Potential:

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi = -\,C v g \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d k \frac{\sin n\tau}{n} \frac{\mathfrak{Cof}\, k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\, k h} J_1(k a) J_0(k r_\tau) \\ &\text{und der Druck:} \\ &P = -g\varrho y - C v g \varrho \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d k \cos n\tau \frac{\mathfrak{Cof}\, k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\, k h} J_1(k a) J_0(k r_\tau). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Zur Auswertung des Integrals benützen wir die Formel[1]):

$$J_0(k r_\tau) = 2 \sum_0^{\infty\,\prime} J_\varkappa(k\varrho) J_\varkappa(k v\tau) \cos\varkappa\vartheta, \tag{6}$$

wobei der Strich bedeuten soll, daß das erste Glied der Reihe nicht doppelt zu nehmen ist.

Wir erhalten nun

$$Y = -\,2 C v \int_0^\infty d k\, J_1(k a) \sum_0^{\infty\,\prime} J_\varkappa(k\varrho) \cos\varkappa\vartheta \int_0^\infty \cos n\tau J_\varkappa(k v\tau) d\tau. \tag{7}$$

Zunächst fassen wir den Ausdruck

$$\sum_0^{\infty\,\prime} J_\varkappa(k\varrho) \cos\varkappa\vartheta \int_0^\infty \cos n\tau J_\varkappa(k v\tau) d\tau$$

1) N. Nielsen, Zylinderfunktionen § 111 (4).

ins Auge und formen ihn um unter Benützung der allgemeinen Formeln für Besselsche Funktionen[1]):

$$(8) \qquad J_\varkappa(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\varkappa\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\alpha} e^{i\varkappa\alpha}\, d\alpha .$$

So wird:

$$J_\varkappa(k\,v\,\tau) = \frac{e^{-i\varkappa\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_A e^{ikv\tau\cos\alpha} e^{i\varkappa\alpha}\, d\alpha .$$

Da über τ von 0 bis ∞ integriert werden muß, ist der Integrationsweg so zu deformieren, daß $\cos\alpha$ stets einen positiv imaginären Teil hat. Dies ist der Fall auf dem in Fig. 3 gezeichneten Weg.

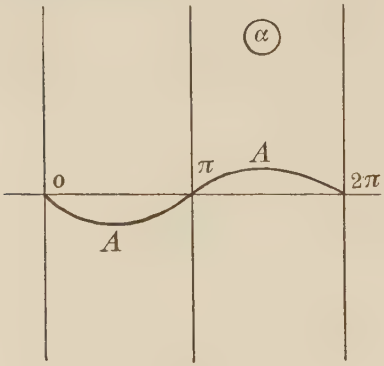


Fig. 3.

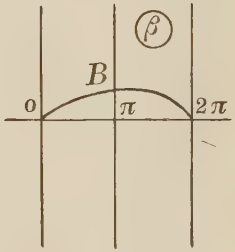


Fig. 4.

Ebenso wird:

$$J_\varkappa(k\,\varrho) = \frac{e^{-i\varkappa\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_B e^{ik\varrho\cos\beta} e^{i\varkappa\beta}\, d\beta .$$

Da wir über $\varkappa$ von 0 bis ∞ summieren müssen, können wir den Integrationsweg B nicht dem Wege A gleich führen, sondern müssen ihn so verschieben, daß β stets einen positiv imaginären Teil hat, der größer ist, als der imaginäre Teil von α, was auf dem in Fig. 4 gezeichneten Wege erreicht ist.

---

1) Vgl. z. B. N. Nielsen, l. c. § 19 (1.)

Zusammenfassend erhalten wir:

$$(9)\quad \begin{cases} \sum_0^{\infty}{}' J_\varkappa(k\varrho)\cos\varkappa\vartheta \int_0^{\infty} \cos n\tau\, J_\varkappa(kv\tau)\, d\tau \\ \qquad = \frac{1}{4\pi^2}\int_B d\beta\, e^{ik\varrho\cos\beta}\int_A d\alpha \sum_0^{\infty}{}' e^{i\varkappa(\alpha+\beta-\pi)}\cos\varkappa\vartheta \\ \qquad\qquad \int_0^{\infty} d\tau\cos n\tau\, e^{ikv\tau\cos\alpha}. \end{cases}$$

Diese Summationen (Integrationen) müssen wir nun eine nach der andern ausführen und so das physikalische Problem etwas aus den Augen verlieren. Wir gehen in der Reihenfolge vor, wie sie obiger Ausdruck vorzeichnet und haben zunächst:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} d\tau\, e^{ikv\cos\alpha\,.\,\tau}\left(e^{in\tau}+e^{-in\tau}\right) = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{kv\cos\alpha+n}+\frac{1}{kv\cos\alpha-n}\right).$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_0^{\infty}{}' e^{i\varkappa(\alpha+\beta-\pi)}\left(e^{i\varkappa\vartheta}+e^{-i\varkappa\vartheta}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1+e^{i(\alpha+\beta+\vartheta-\pi)}}{1-e^{i(\alpha+\beta+\vartheta-\pi)}}+\frac{1+e^{i(\alpha+\beta-\vartheta-\pi)}}{1-e^{i(\alpha+\beta-\vartheta-\pi)}}\right).$$

Wir erhalten dann das Integral:

$$-\frac{1}{8i}\int_A d\alpha\left(\frac{1}{kv\cos\alpha+n}+\frac{1}{kv\cos\alpha-n}\right)\left(\frac{1+e^{i(\alpha+\beta+\vartheta-\pi)}}{1-e^{i(\alpha+\beta+\vartheta-\pi)}}+\frac{1+e^{i(\alpha+\beta-\vartheta-\pi)}}{1-e^{i(\alpha+\beta-\vartheta-\pi)}}\right).$$

Schreiben wir

$$e^{i(\beta+\vartheta-\pi)} = m \quad \text{und} \quad e^{i(\beta-\vartheta-\pi)} = m'$$

und führen als neue Unbekannte ein: $e^{i\alpha} = x$, so wird

$$d\alpha = -i\frac{dx}{x}$$

und unser Integral

$$\frac{1}{4kv}\int_A dx\left(\frac{1}{x^2+\frac{2n}{kv}x+1}+\frac{1}{x^2-\frac{2n}{kv}x+1}\right)\left(\frac{1+mx}{1-mx}+\frac{1+m'x}{1-m'x}\right).$$

Der neue Integrationsweg A wird nun auf der x-Ebene ein geschlossener, dessen Verlauf durch Figur 5 gekennzeichnet ist. Die als charakteristisch auftretende Zahl n/kv hat einen anschaulichen physikalischen Sinn, sie bedeutet das Verhältnis der jeweils betrachteten Wellengeschwindigkeit n/k zur Schiffsgeschwindigkeit v. Um unser Integral auszuwerten, bestimmen wir die Pole des Integranden und untersuchen, welche von diesen Polen im Inneren unseres Integrationsgebietes liegen. Der Integrand ist:

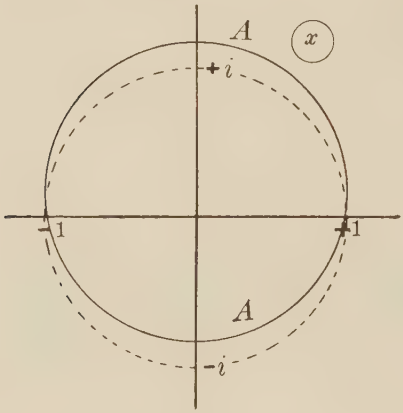


Fig. 5.

$$\left\{\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}+\frac{1}{(x-x_3)(x-x_4)}\right\}\left(\frac{1+mx}{1-mx}+\frac{1+m'x}{1-m'x}\right),$$

wenn:

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{n}{kv}+\sqrt{\left(\frac{n}{kv}\right)^2-1} = -e^{-i\varphi}, \\ x_2 = -\frac{n}{kv}-\sqrt{\left(\frac{n}{kv}\right)^2-1} = -e^{+i\varphi}, \\ x_3 = +\frac{n}{kv}+\sqrt{\left(\frac{n}{kv}\right)^2-1} = +e^{+i\varphi}, \\ x_4 = +\frac{n}{kv}-\sqrt{\left(\frac{n}{kv}\right)^2-1} = +e^{-i\varphi}. \end{cases}$$

Für die hier eingeführte wichtige Hilfsgröße φ gelten also die Beziehungen:

$$(11)\qquad \cos\varphi = \frac{n}{kv}, \qquad i\sin\varphi = \sqrt{\left(\frac{n}{kv}\right)^2-1}\,.$$

Durchläuft k *alle Werte von 0 bis* n/v, so läuft φ auf der negativ imaginären Achse von $-\infty$ bis 0. In diesem Falle liegen die Pole unseres Ausdruckes auf der reellen Achse in der x-Ebene und zwar liegen, wie man leicht sieht, x_1 und x_4 im Inneren unseres Integrationsgebietes.

Durchläuft k *die Werte von* n/v *bis* ∞, so geht φ von 0 auf der positiv reellen Achse bis $\pi/2$. Im Inneren des Integrationsgebietes liegen dann x_1 und x_3.

Weiterhin existieren noch die Pole

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{m} = e^{-i(\beta+\vartheta-\pi)} \\ \text{und} \\ x &= \frac{1}{m'} = e^{-i(\beta-\vartheta-\pi)} \end{aligned}\right\} = e^{+\operatorname{Im}(\beta)} \cdot e^{i(\text{reelle Zahl})}.$$

Der imaginäre Teil von β ist nun, wie oben festgesetzt, stets positiv und größer als der imaginäre Teil von α; infolgedessen liegen diese Pole außerhalb unseres Integrationsgebietes und wir können unseren Weg zusammenziehen auf zwei geschlossene Wege um einfache Pole, die verschieden liegen, je nachdem $k \gtrless n/v$ ist.

Es wird so für $k < n/v$ (Wellengeschwindigkeit > Schiffsgeschwindigkeit):

$$\int_A dx \ldots = \frac{2\pi i}{2i \sin\varphi}\left[\frac{1 - m e^{-i\varphi}}{1 + m e^{-i\varphi}} + \frac{1 - m' e^{-i\varphi}}{1 + m' e^{-i\varphi}} - \frac{1 + m e^{-i\varphi}}{1 - m e^{-i\varphi}} - \frac{1 + m' e^{-i\varphi}}{1 - m' e^{-i\varphi}}\right]$$

und für $k > n/v$ (Wellengeschwindigkeit < Schiffsgeschwindigkeit):

$$\int_A dx \ldots = \frac{2\pi i}{2i \sin\varphi}\left[\frac{1 - m e^{-i\varphi}}{1 + m e^{-i\varphi}} + \frac{1 - m' e^{-i\varphi}}{1 + m' e^{-i\varphi}} + \frac{1 + m e^{i\varphi}}{1 - m e^{i\varphi}} + \frac{1 + m' e^{i\varphi}}{1 - m' e^{i\varphi}}\right].$$

So erhalten wir schließlich durch Einsetzen dieser Resultate in (9) und (7) den Ausdruck:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} Y = -\frac{C}{8\pi}\Bigg[& \int_{\frac{n}{v}}^{\infty} \frac{dk}{k} J_1(ka) \int_B d\beta\, e^{ik\varrho\cos\beta} \cdot Q_1 \\ & + \int_0^{\frac{n}{v}} \frac{dk}{k} J_1(ka) \int_B d\beta\, e^{ik\varrho\cos\beta} \cdot Q_2 . \end{aligned}\right.$$

wobei

$$(13)\begin{cases} Q_1 = \dfrac{1}{\sin\varphi}\left[\dfrac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}} + \dfrac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}} + \dfrac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}}\right] \\ \text{und} \\ Q_2 = \dfrac{1}{\sin\varphi}\left[\dfrac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}} + \dfrac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\pi-\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\pi-\varphi)}} - \dfrac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\pi-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\pi-\varphi)}}\right]. \end{cases}$$

Der entsprechende Druck ist:

$$(14)\begin{cases} P = -g\varrho y - \dfrac{C\varrho g}{8\pi}\left[\displaystyle\int_{\frac{n}{v}}^{\infty}\frac{dk}{k}J_1(ka)\frac{\mathfrak{Cof}\,k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\,kh}\int_B d\beta\, e^{ik\varrho\cos\beta}\,.\,Q_1\right. \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\int_0^{\frac{n}{v}}\frac{dk}{k}J_1(ka)\frac{\mathfrak{Cof}\,k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\,kh}\int_B e^{ik\varrho\cos\beta}\,.\,Q_2\right]. \end{cases}$$

Berechnen wir das dazu gehörige Potential so ist zu beachten, daß dort $\sin n\tau$ steht statt $\cos n\tau$, infolgedessen der Faktor $1/i$ noch vortritt und sich in den Ausdrücken Q_1 und Q_2 einige Zeichen umkehren, so daß wird:

$$(15)\begin{cases} \Phi = -\dfrac{Cg}{8\pi}\left[\displaystyle\int_{\frac{n}{v}}^{\infty}\frac{dk}{kn}J_1(ka)\frac{\mathfrak{Cof}\,k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\,kh}\int_B d\beta\, e^{ik\varrho\cos\beta}\,.\,Q_1'\right. \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\int_0^{\frac{n}{v}}\frac{dk}{kn}J_1(ka)\frac{\mathfrak{Cof}\,k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\,kh}\int_B d\beta\, e^{ik\varrho\cos\beta}\,.\,Q_2'\right], \end{cases}$$

wobei:

$$(16)\begin{cases} Q_1' = \dfrac{1}{i\sin\varphi}\left[\dfrac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}} + \dfrac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}} - \dfrac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}}\right] \end{cases}$$

und

$$(16)\quad Q_2' = \frac{1}{i \sin \varphi}\left[\frac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}} + \frac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}} + \frac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\pi-\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\pi-\varphi)}} + \frac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\pi-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\pi-\varphi)}}\right].$$

§ 3. Diskussion der Integrale $\int_B d\beta \ldots$ für große Entfernung vom Schiff.

Bis hierher sind unsere Ausführungen ganz allgemein, sie gelten für jede Entfernung vom Schiff und für jede spezielle Näherung der Dispersionsformel. Nun verlassen wir diese Allgemeinheit, indem wir den Vorgängen in unmittelbarer Nähe des Schiffes keine weitere Beachtung schenken; dort kann ja unsere Theorie auch keine Resultate liefern, die mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung stehen. Wir gehen also in eine solche Entfernung vom Schiff, daß wir $k\varrho$ als große Zahl und die unter dem Integralzeichen stehende periodische Funktion

$$e^{ik\varrho\cos\beta} = e^{i\frac{n\varrho}{v\cos\varphi}\cos\beta} \quad \text{(vgl. Gl. (11))}$$

als eine sehr schnell oszillierende betrachten können. Praktisch bedeutet dies, daß die Entfernung ϱ des betrachteten Punktes vom Schiff groß sein soll, gegen n/v, d. i. gegen den $2\pi^{\text{ten}}$ Teil der Länge einer mit Schiffsgeschwindigkeit fortschreitenden Welle. Diese Näherung wird unser Wellenbild richtig darstellen bis auf die ersten Erhebungen hinter dem Schiff, also überall da, wo unsere wirbellose Theorie überhaupt einen Sinn hat.

Betrachten wir zunächst das Integral;

$$(17)\qquad \int_B d\beta\, e^{iy\cos\beta}\,.\,Q_1\,,$$

wobei $y = (n\varrho/v\cos\varphi)$.

Wir verschieben unseren Integrationsweg so, daß $\cos\beta$ stets einen positiv imaginären Teil hat, d. i. auf den Weg C. Nachdem nämlich die Summation über $\varkappa$ ausgeführt ist, muß der Weg nicht mehr notwendig in der positiv imaginären Halb-

ebene von β, wie in Fig. 4, verlaufen und kann in der beschriebenen Weise verschoben werden. Dabei ist zu beachten, daß wir für $0 < \beta < \pi$ die reelle Achse überschreiten müssen, auf welcher Pole des Ausdruckes Q_1 liegen. Wir müssen also noch einen Integrationsweg D um diese Pole herum in Betracht ziehen. Wie man erwarten kann und sich auch bald zeigen wird, ist gerade dieser Teil unseres Integrals der bedeutungsvollste, und wir wollen uns ihm zuerst zuwenden.

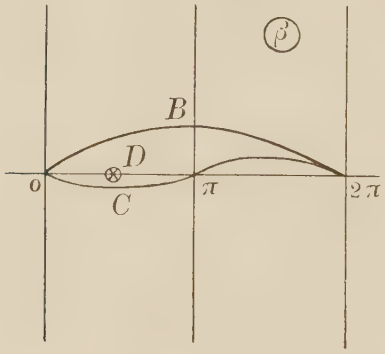


Fig. 6.

I. *Integrationsweg D:* Entsprechend den vier Summanden des Ausdruckes Q_1 (13) haben wir vier Integrale dieses Weges zu betrachten; für alle vier Integrale unterliegen die Größen β und φ folgenden Einschränkungen:

Aus Fig. 6 folgt ohne weiteres, daß stets $0 < \beta < \pi$.

Die Grenzen des Integrals über k, unter dem der Ausdruck Q_1 vorkommt (12), ergeben bei Berücksichtigung von (11), daß $\cos\varphi < 1$ bleiben soll, also $0 < \varphi < (\pi/2)$.

Wir haben:

$$1. \quad \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1 + e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}{1 - e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}.$$

Pol:	$\beta + \vartheta - \pi = 0,$
existert für	$0 < \varphi - \vartheta < \pi,$
oder	$\vartheta < \varphi < \pi - \vartheta.$

Da aber φ auf das Gebiet zwischen 0 und $(\pi/2)$ beschränkt bleiben soll, ist das Gebiet, in welchem der Pol zu berücksichtigen ist, abzugrenzen durch

$$\vartheta < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ für } \vartheta < \frac{\pi}{2}, \text{ d. i. hinter dem Schiff,}$$

und existiert nicht für $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, d. i. vor dem Schiff.

Im Gebiete, wo der Pol existiert, wird:

$$(18)\quad \left\{ \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}} = -2\pi i . e^{iy\cos(\varphi-\vartheta)} \cdot \frac{2}{-i} \right.$$
$$\left. = 4\pi e^{iy\cos(\varphi-\vartheta)} . \right.$$

$$2.\quad \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}} .$$

Pol: $\beta - \vartheta - \varphi = 0$,

existiert für $0 < \vartheta + \varphi < \pi$.

Zu berücksichtigen in den Gebieten:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{wenn } \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \varphi < \pi - \vartheta, \quad \text{wenn } \vartheta > \frac{\pi}{2}.$$

Also wird

$$(19)\quad \left\{ \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\varphi)}} = -2\pi i . e^{iy\cos(\varphi+\vartheta)} \cdot \frac{2}{-i} \right.$$
$$\left. = 4\pi e^{iy\cos(\varphi+\vartheta)} . \right.$$

$$3.\quad \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}},$$

Pol: $\beta + \vartheta - \pi + \varphi = 0$,

existiert für $0 < \vartheta + \varphi < \pi$, als wie bei 2.

$$(20)\quad \left\{ \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1+e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta+\vartheta-\pi+\varphi)}} = 4\pi e^{iy\cos(\pi-\vartheta-\varphi)} \right.$$
$$\left. = 4\pi e^{-iy\cos(\vartheta+\varphi)} . \right.$$

$$4.\quad \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}} .$$

Pol: $\beta - \vartheta + \varphi - \pi = 0$,

existiert für $0 < \varphi - \vartheta < \pi$, also wie bei 1.

$$(21)\quad \left\{ \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} \frac{1+e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}}{1-e^{i(\beta-\vartheta-\pi+\varphi)}} = 4\pi e^{iy\cos(\pi+\vartheta-\varphi)} \right.$$
$$\left. = 4\pi e^{-iy\cos(\varphi-\vartheta)} . \right.$$

Aus den Ausdrücken 1. bis 4 können wir die Integrale

$$\int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} Q_1 \quad \text{und} \quad \int_D d\beta\, e^{iy\cos\beta} Q_1'$$

in Gleichung (12) bis (15) zu einfachen cos- bzw. sin-Größen zusammensetzen. Den Existenzgrenzen der einzelnen Pole entsprechen dann die Integrationsgrenzen über φ.

II. *Integrationsweg C*: Der Weg C verläuft ganz in den Gebieten, wo cos β einen positiv imaginären Teil hat. Ferner machen wir nun von der Voraussetzung Gebrauch, daß y eine große Zahl sein soll; es ist dann klar, daß von dem ganzen Integrationsweg nur die Umgebung der Punkte in Betracht kommt, an welchen dieser imaginäre Teil von cos β klein ist, d. h. die Sattelpunkte $\beta = 0$, $\beta = \pi$, $\beta = 2\pi$, und daß wir den Weg C am passendsten so verschieben, daß mit ihm der imaginäre Teil von cos β möglichst schnell wächst.[1])

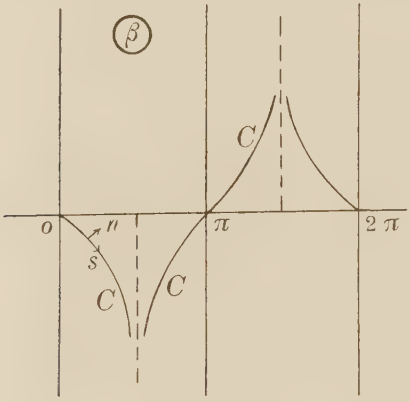


Fig. 7.

Ist also cos $\beta = R + iJ$, so verlangen wir, daß J in Richtung s des Integrationsweges C am steilsten wächst und daher in der Richtung n, senkrecht zum Integrationsweg, sich überhaupt nicht ändert: dieser ist daher charakterisiert durch die Gleichung:

$$\frac{dJ}{dn} = 0,$$

welche nach der allgemeinen Funktionentheorie identisch ist mit

$$\frac{dR}{ds} = 0, \quad \text{also} \quad R = \text{const.}$$

In der Umgebung von $\beta = 0$ ist auf dem Wege $R = 1$ zu

1) Zur Methode vgl. P. Debye, Math. Ann. Bd. 64. Heft 4. 1909.

integrieren. Um die Richtung zu finden, in welcher wir auf der komplexen Ebene weitergehen müssen, entwickeln wir:

$$\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$$

und setzen

$$\beta = a\, e^{i\alpha}.$$

Bedenken wir dann, daß $-\beta^2$ positiv imaginär sein muß, so ergibt sich

$$\beta = a\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Das positive Vorzeichen bestimmt sich daraus, daß der Weg an der betreffenden Stelle in der negativ imaginären Halbebene verlaufen muß. Wir schreiben nun unser Integral mit genügender Annäherung

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{R=1} e^{iy\cos\beta}\,\frac{1+m\,e^{i\beta}}{1-m\,e^{i\beta}}\,d\beta &= \frac{1+m}{1-m}\,e^{i\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2}a^2}\,da \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\,y}}\,\frac{1+m}{1-m}\,e^{i\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned} \right.$$

In der Umgebung von $\beta = \pi$ ist der Integrationsweg

$$R = -1 \quad \text{und} \quad \pi - \beta = -\,a\,e^{+i\frac{\pi}{4}},$$

wie leicht auf obigem Wege gezeigt werden kann; wir erhalten:

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{R=-1} e^{iy\cos\beta}\,\frac{1+m\,e^{i\beta}}{1-m\,e^{i\beta}}\,d\beta &= -\,e^{-i\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}\,\frac{1-m}{1+m}\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{y}{2}a^2}\,da \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\,y}}\,\frac{1-m}{1+m}\,e^{-i\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Zwischen $\beta = \pi$ und $\beta = 2\,\pi$ ergibt sich naturgemäß derselbe Wert für das Integral.

Wir können also aus den erhaltenen Resultaten die Integrale

$$\int_C d\beta\, e^{iy\cos\beta}\,.\,Q_1 \quad \text{und} \quad \int_C d\beta\, e^{iy\cos\beta}\,.\,Q_1'$$

zusammensetzen. Es ist ohne weiteres klar, daß diese Integrale

nicht in erster Näherung in Betracht kommen, da sie den Faktor $(1/\sqrt{y})$ haben.

Wir wenden uns nun dem Integral

$$\int_B d\beta\, e^{iy\cos\beta} \cdot Q_2$$

zu. Wenn wir hier den Weg B über die reelle Achse wegziehen, so überschreiten wir keine singulären Stellen; denn φ ist jetzt negativ imaginär, die Pole haben alle die Form $\beta =$ (reelle Zahl $+ \varphi$), also liegen sie alle in der Halbebene der negativ imaginären φ. Wir haben daher keinen dem Wege D entsprechenden Teil und können auch dem Wege C seine frühere Gestalt (Fig. 7) geben, wenn wir nur uns ausdrücklich auf die nächste Nähe der reellen Achse beschränken, was wir ja von vornherein festgesetzt haben. Es wird also:

$$\int_B d\beta\, e^{iy\cos\beta} \cdot Q_2 = \int_C d\beta\, e^{iy\cos\beta} \cdot Q_2 .$$

und da bei der Ausrechnung der einzelnen Summanden dieses Integrals der Wert von φ gar nicht in Betracht kommt, erhalten dieselben die gleiche Form wie beim vorhergehenden Integral über C.

Ehe wir die Resultate dieses Paragraphen übersichtlich zusammenstellen, müssen wir noch einen Blick auf den Teil unseres Integrals über β in (12) werfen, für den wir nicht mehr y als sehr groß annehmen können; das ist der Fall, wenn $\cos\varphi$ sehr groß wird, also φ eine sehr große, negativ imaginäre Zahl; dann ist y eine mäßige Zahl, auch wenn $n\varrho/v$ sehr groß ist.

Wir haben dann:

$$\int_C d\beta\, e^{iy\cos\beta} \cdot \frac{1}{\sin\varphi}\left[\frac{1 + e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}}{1 - e^{i(\beta+\vartheta-\varphi)}} + \dots\right].$$

Wenn wir den Integrationsweg stets in der Nähe der reellen Achse führen, so wird der Ausdruck in der Klammer eine endliche Größe und wir haben ein konvergentes Integral, das wie $1/\sin\varphi$, also sehr stark verschwindet. Wir können darum, wie ja zu erwarten war, diesen Teil unseres Integrals ruhig vernachlässigen.

Zusammenfassung.

Somit ist auch die Integration nach β ausgeführt und Y erscheint als einfaches Integral:

$$(24)\quad \begin{cases} Y = -\frac{C}{8\pi}\left[\int\limits_{\frac{n}{v\cos\vartheta}}^{\infty}\frac{dk}{k}J_1(ka)\,.\,U_1+\int\limits_{\frac{n}{v}}^{\infty}\frac{dk}{k}J_1(ka)\,.\,(U_2+U_3)\right. \\ \qquad\qquad\left.+\int\limits_{0}^{\frac{n}{v}}\frac{dk}{k}J_1(ka)\,.\,U_4\right] \text{ für } \vartheta<\frac{\pi}{2} \\ \text{und} \\ Y = -\frac{C}{8\pi}\left[\int\limits_{\frac{n}{v}}^{\frac{n}{v\cos(\pi-\vartheta)}}\frac{dk}{k}J_1(ka)\,.\,U_2+\int\limits_{\frac{n}{v}}^{\infty}\frac{dk}{k}J_1(ka)\,.\,U_3\right. \\ \qquad\qquad\left.+\int\limits_{0}^{\frac{n}{v}}\frac{dk}{k}J_1(ka)\,.\,U_4\right] \text{ für } \vartheta>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Hier sind die Ausdrücke

$$(25)\quad \begin{cases} U_1 = \frac{8\pi}{\sin\varphi}\cos\left\{\frac{n\varrho}{v}\frac{\cos(\varphi-\vartheta)}{\cos\varphi}\right\}, \\ U_2 = \frac{8\pi}{\sin\varphi}\cos\left\{\frac{n\varrho}{v}\frac{\cos(\varphi+\vartheta)}{\cos\varphi}\right\} \end{cases}$$

Zusammenfassungen der von den Integrationen auf dem Wege D herrührenden Residuen. Die Resultate der Integrationen auf dem Wege C ergeben die Ausdrücke:

$$U_3 = \frac{2}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\left[\left\{\frac{1+e^{i(\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(\vartheta-\varphi)}}+\frac{1+e^{i(-\vartheta-\varphi)}}{1-e^{i(-\vartheta-\varphi)}}+\frac{1-e^{i(\vartheta+\varphi)}}{1+e^{i(\vartheta+\varphi)}}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1-e^{i(-\vartheta+\varphi)}}{1+e^{i(-\vartheta+\varphi)}}\right\}e^{+i\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$+\left\{\frac{1-e^{i(\vartheta-\varphi)}}{1+e^{i(\vartheta-\varphi)}}+\frac{1-e^{i(-\vartheta-\varphi)}}{1+e^{i(-\vartheta-\varphi)}}+\frac{1+e^{i(\vartheta+\varphi)}}{1-e^{i(\vartheta+\varphi)}}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1+e^{i(-\vartheta+\varphi)}}{1-e^{i(-\vartheta+\varphi)}}\right\}e^{-i\left(y-\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

oder vereinfacht:

$$(26)\quad \begin{cases} U_3 = \dfrac{8}{\sin\varphi}\sqrt{\dfrac{\pi v\cos\varphi}{2n\varrho}}\left(\dfrac{1}{\sin(\vartheta+\varphi)} - \dfrac{1}{\sin(\vartheta-\varphi)}\right)\sin \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left(\dfrac{n\varrho}{v\cos\varphi} - \dfrac{\pi}{4}\right), \\ U_4 = U_3, \end{cases}$$

wie eine einfache Rechnung zeigt.

Ebenso können wir natürlich durch Vergleich mit den Formeln (14) und (15) am Ende von § 2 den Druck P und das Potential Φ hinschreiben. Bei Φ treten dann Funktionen U_1' usw. auf, die analog erhalten werden:

$$(27)\quad \begin{cases} U_1' = \dfrac{8\pi}{\sin\varphi}\sin\left(\dfrac{n\varrho}{v}\dfrac{\cos(\varphi-\vartheta)}{\cos\varphi}\right), \\ U_2' = \dfrac{8\pi}{\sin\varphi}\sin\left(\dfrac{n\varrho}{v}\dfrac{\cos(\varphi+\vartheta)}{\cos\varphi}\right), \\ U_3' = \dfrac{8}{\sin\varphi}\sqrt{\dfrac{\pi v\cos\varphi}{2n\varrho}}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\vartheta-\varphi)} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\vartheta+\varphi)}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cos\left(\dfrac{n\varrho}{v\cos\varphi} - \dfrac{\pi}{4}\right) = U_4'; \end{cases}$$

dabei sind φ und n Funktionen von k:

$$(11)\qquad \cos\varphi = \frac{n}{kv},$$

$$(2)\qquad n = (g\,k\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,k\,h)^{1/2}.$$

Wir verlassen nun die allgemeine, formale Behandlung und wenden uns in den folgenden Paragraphen dem physikalischen Problem wieder zu, indem wir zunächst die Form der Oberfläche in den wichtigsten Fällen ausrechnen und beschreiben.

§ 4. Gestalt der Oberfläche auf tiefem Wasser.

Die wichtigste Form der Schiffswellen ist offenbar diejenige, welche man auf ruhigem Meer oder auf einem See beobachtet; die Erfahrung zeigt, daß auch die Wellen, welche etwa einer schwimmenden Ente folgen, keine andere Gestalt haben. Daß der Gültigkeitsbereich der „*Tiefseewellen*“ wirklich ein so großer ist, wird aus der mathematischen Diskussion leicht klar. Tief im Sinne der Wellenlehre ist ein Wasser, bei welchem $\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,k\,h = 1$ gesetzt werden kann, die Wellenfortpflanzung also nicht mehr von der Tiefe abhängt und die Wellen-

länge λ klein ist gegen $2\pi h$. Die Betrachtung irgend eines Schiffswellengitters zeigt, daß diese Bedingung meist erfüllt ist.

Wir setzen also nun in unsere Ausdrücke für Y ein (vgl. (2) und (11)):

$$n = \sqrt{g\,k},$$

also

$$k = \frac{\sqrt{g\,k}}{\cos\varphi \,.\, v},$$

$$k = \frac{g}{v^2 \cos^2\varphi}.$$

Ferner ergibt sich, wenn wir φ als Variable nehmen:

$$dk = \frac{2\,g \sin\varphi}{v^2 \cos^3\varphi}\, d\varphi.$$

Um eine erste Näherung für unsere Oberflächenform zu erhalten, brauchen wir von den in (24) stehenden Integralen nur die über die Ausdrücke U_1 und U_2 zu berücksichtigen, da U_3 und U_4 den nach Voraussetzung kleinen Faktor $\sqrt{v^2/g\,\varrho}$ aufweisen. Wir erhalten dann aus (24) und (25), indem wir die Variable φ benutzen:

$$Y = -2C \int_{\vartheta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi}\right) \cos\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\frac{\cos(\varphi-\vartheta)}{\cos^2\varphi}\right)$$

$$-2C \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi}\right) \cos\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\frac{\cos(\varphi+\vartheta)}{\cos^2\varphi}\right)$$

für $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, also hinter dem Schiff

und

$$Y = -2C \int_{0}^{\pi-\vartheta} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi}\right) \cos\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\frac{\cos(\varphi+\vartheta)}{\cos^2\varphi}\right)$$

für $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, also vor dem Schiff.

Da $g\,\varrho/v^2$ eine große Zahl ist, sind dies Integrale über Funktionen, welche bei Änderung von φ sehr schnell oszillieren, außer an den Stellen, wo $\cos(\varphi \pm \vartheta)/\cos^2\varphi$ bei Änderung von φ

sich nicht ändert, d. i. an den Stellen des Minimums oder Maximums dieser Oszillationsgröße.

Machen wir diese zur unabhängigen Variablen, so wird in den umgeformten Integralen an den betreffenden Stellen eine Unendlichkeit auftreten, und die Integrale werden sich verschieden verhalten, je nachdem solche Stellen existieren oder nicht. Im ersten Falle kommt es nur auf die Umgebung der Unendlichkeitsstellen an, wir können von dort aus entwickeln und unserem Integral die Gestalt einer Γ-Funktion geben. Im zweiten Fall erhalten wir durch fortgesetzte partielle Integration eine nach positiven Potenzen der kleinen Größe $v^2/g\varrho$ fortschreitende Reihe. Es ist klar, daß die im zweiten Falle auftretenden Größen gegen die im ersten Fall erscheinenden in erster Näherung zurücktreten; daß also die Unendlichkeitsstellen unseres Integranden für die Hauptwellenzüge charakteristisch sind. Wir haben also zuerst diese Unendlichkeitsstellen zu suchen.

Das erste Integral erhält die Form:

$$Y_1 = -2C\int_{\varphi=\vartheta}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\Psi \cos\left(\frac{g\varrho}{v^2}\Psi\right)\cdot\frac{J_1\left(\frac{ga}{v^2\cos^2\varphi}\right)}{\cos\varphi\,.\,\Psi'},$$

wobei

$$\Psi = \frac{\cos(\varphi-\vartheta)}{\cos^2\varphi} \quad\ldots\quad \Psi' = \frac{\cos(\varphi-\vartheta)\,.\,2\cos\varphi\sin\varphi - \cos^2\varphi\,.\,\sin(\varphi-\vartheta)}{\cos^4\varphi}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(2\cos(\varphi-\vartheta)\operatorname{tg}\varphi - \sin(\varphi-\vartheta)\right).$$

Wir haben also die Unendlichkeitsstellen des Ausdruckes

$$\frac{\cos\varphi\,.\,J_1\left(\frac{ga}{v^2\cos^2\varphi}\right)}{2\cos(\varphi-\vartheta)\operatorname{tg}\varphi - \sin(\varphi-\vartheta)}$$

zu suchen, die zwischen $\varphi=\vartheta$ und $\varphi=\pi/2$ auf der reellen φ-Achse liegen. Dies sind offenbar die Wurzeln der Gleichung:

$$(28)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}(\varphi-\vartheta) = 2\operatorname{tg}\varphi, \\ \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\vartheta = 2\operatorname{tg}\varphi(1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta), \\ \operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2\operatorname{tg}\vartheta}\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{4\operatorname{tg}\vartheta} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{(4\operatorname{tg}\vartheta)^2}}. \end{cases}$$

Da $\vartheta < \pi/2$, *liegen die Wurzeln* in Gebieten, wo $\operatorname{tg}\varphi$ negativ ist, also *nicht in unserem Integrationsgebiet*; dieses Integral kommt also noch nicht in erster Näherung in Frage.

Analog führen wir bei den anderen Integralen die neue Variable $\Phi = \cos(\varphi+\vartheta)/\cos^2\varphi$ ein und stoßen auf die transzendente Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\varphi+\vartheta) = 2\operatorname{tg}\varphi. \tag{29}$$

Die Wurzeln, die für uns in Betracht kommen, müssen

$$\text{für } \vartheta < \frac{\pi}{2} \text{ zwischen } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\text{für } \vartheta > \frac{\pi}{2} \text{ zwischen } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = \pi - \vartheta$$

liegen.

Es wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4\operatorname{tg}\vartheta} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2} + \frac{1}{(4\operatorname{tg}\vartheta)^2}}.$$

Ist $\vartheta > \pi/2$, so wird $\operatorname{tg}\vartheta$ negativ, und die Wurzeln liegen außerhalb unseres Integrationsgebietes.

Ist dagegen $\vartheta < \pi/2$, so erhalten wir positive, reelle, in unserem Integrationsgebiet liegende Wurzeln, für alle Werte von ϑ, die unterhalb einer durch die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{16\operatorname{tg}^2\vartheta} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

bestimmten Grenze liegen. Dieser Grenzwert ist $\vartheta = 19^0\,28'$, also der schon aus Lord Kelvins Arbeiten bekannte und durch die Erfahrung durchaus bestätigte, für alle Schiffsgeschwindigkeiten gleiche Winkel, innerhalb dessen allein wir eine wesentliche Erhebung der Oberfläche beobachten. So springt uns hier aus unserem Integralausdruck bereits eines der interessantesten Schiffswellenphänomene entgegen: *Das stets dem Überlichtgeschwindigkeitsfeld vergleichbare, ganz hinter dem Schiff verbleibende Wellenbild und der diese Analogie verletzende, dem Machschen Phänomen so schroff entgegengesetzte, von der Geschwindigkeit unabhängige Winkel.*

Innerhalb dieses Winkels gilt:

$$Y = -C\int \frac{d\Phi}{\Phi'} \frac{J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi}\right)}{\cos\varphi} \left(e^{i\frac{g\varrho}{v^2}\Phi} + e^{-i\frac{g\varrho}{v^2}\Phi}\right), \tag{30}$$

wenn wir von den beiden Unendlichkeitsstellen

$$\operatorname{tg}\varphi_\alpha = \frac{1}{4\operatorname{tg}\vartheta} \pm \sqrt{\frac{1}{16\operatorname{tg}^2\vartheta} - \frac{1}{2}} \tag{31}$$

aus entwickeln, und unser Integral von dort nach beiden Seiten beliebig erstrecken mit einziger Berücksichtigung der Umgebung dieser Stellen. Der Index α steht hier für die beiden Indizes 0 und 1, von denen ersterer die Stelle bezeichnen soll, an welcher Φ, als Funktion von φ betrachtet, ein Maximum wird, letzterer die entsprechende Minimumstelle. Wir können leicht entscheiden, welches Vorzeichen der Wurzel in (31) dem Maximum, welches dem Minimum zugehört. Denn da $\vartheta < \pi/2$, wird Φ in der Nähe von $\varphi = 0$ mit wachsendem φ kleiner, und geht bei $\varphi = \pi/2$ ins negativ Unendliche.

Wir haben also dem Minimum φ_1 den kleineren der beiden in (31) auftretenden Werte von φ_α zuzuordnen, d. i. den Wert mit negativer Wurzel. Das positive Vorzeichen der Wurzel entspricht dem Maximum φ_0.

Es wird:

$$\Phi = \Phi_\alpha + \frac{(\varphi-\varphi_\alpha)^2}{2}\Phi_\alpha'' + \ldots,$$

$$\Phi' = (\varphi-\varphi_\alpha)\Phi_\alpha'' + \ldots,$$

$$= \pm\sqrt{2(\Phi-\Phi_\alpha).\Phi_\alpha''} + \ldots$$

Ist Φ_0 das *Maximum* von Φ, so haben wir ein Integral über Φ von kleineren Werten zum Maximalwert Φ_0, in dem Φ' positiv, und ein solches von Φ_0 nach kleineren Werten hin, in dem Φ' negativ zu nehmen ist. Die untere Grenze können wir beliebig weit, also nach $-\infty$ verschieben. Wir erhalten also zweimal ein Integral

$$\int_{-\infty}^{0} d\Phi \ldots$$

mit positivem Vorzeichen. Dies Integral ist eine rein imaginäre Größe; um alles reell zu schreiben, beachten wir, daß $\sqrt{\Phi_0''}$ ebenfalls imaginär ist, und zwar, da die Vorzeichenfrage durch obige Betrachtungen schon entschieden ist, positiv. Wir schreiben:

$$\sqrt{\Phi_0''} = \sqrt{|\Phi_0''|}\,.\,e^{+i\frac{\pi}{2}}.$$

Ebenso haben wir, wenn Φ_1 das *Minimum* von Φ bezeichnet, ein Integral von Φ_1 bis $+\infty$ zweimal zu nehmen, aber mit negativem Vorzeichen; diesmal ist das Integral, ebenso wie $\sqrt{\Phi_1''}$ reell, also

$$\sqrt{\Phi_1''} = \sqrt{|\Phi_1''|}\,.$$

So erhalten wir:

$$(32)\quad \begin{cases} Y = -\dfrac{C\,.\,J_1\left(\dfrac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi_0}\right)}{\cos\varphi_0\,.\,\sqrt{2\,|\Phi_0''|}}\,.\,e^{i\frac{\pi}{2}}\,.\,2\int\limits_{-\infty}^{\Phi_0}\dfrac{d\,\Phi}{\sqrt{\Phi-\Phi_0}}\left(e^{i\frac{g\,\varrho}{v^2}\Phi}+e^{-i\frac{g\,\varrho}{v^2}\Phi}\right) \\ \quad + \dfrac{C\,.\,J_1\left(\dfrac{g\,a}{v^2\cos\varphi_1}\right)}{\cos\varphi_1\,.\,\sqrt{2\,|\Phi_1''|}}\,.\,2\,.\int\limits_{\Phi_1}^{\infty}\dfrac{d\,\Phi}{\sqrt{\Phi-\Phi_1}}\left(e^{i\frac{g\,\varrho}{v^2}\Phi}+e^{-i\frac{g\,\varrho}{v^2}\Phi}\right). \end{cases}$$

Nun ist:

$$\int\limits_{-\infty}^{\Phi_0}\frac{d\,\Phi}{\sqrt{\Phi-\Phi_0}}\,e^{i\,a\,\Phi} = -\,i\,e^{i\,a\,\Phi_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\,\xi}{\sqrt{\xi}}\,e^{-i\,a\,\xi}\;\ldots\;\xi = -\,\Phi + \Phi_0$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}}\,e^{i\left(a\,\Phi_0+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Ferner:

$$\int\limits_{-\infty}^{\Phi_0}\frac{d\,\Phi}{\sqrt{\Phi-\Phi_0}}\,e^{-i\,a\,\Phi} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,e^{-i\,a\,\Phi_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\,\xi}{\sqrt{\xi}}\,e^{i\,a\,\xi}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}}\,e^{-i\left(a\,\Phi_0+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Ebenso erhält man:

$$\int\limits_{\Phi_1}^{\infty}\frac{d\,\Phi}{\sqrt{\Phi-\Phi_1}}\,e^{i\,a\,\Phi} = e^{i\,a\,\Phi_1}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\,\xi'}{\sqrt{\xi'}}\,e^{i\,a\,\xi'}\;\ldots\;\xi' = \Phi - \Phi_1$$

$$= e^{i\left(a\,\Phi_1-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

und

$$\int\limits_{\Phi_1}^{\infty}\frac{d\,\Phi}{\sqrt{\Phi-\Phi_1}}\,e^{-i\,a\,\Phi} = e^{-i\left(a\,\Phi_1-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

So wird unser definitiver Ausdruck der ersten Näherung:

$$(33)\quad \left\{ Y = \frac{4\,C\,v}{\sqrt{2\,g\,\varrho}} \left[\frac{J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi_0}\right)}{\cos\varphi_0 \sqrt{|\Phi_0''|}} \cos\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\Phi_0 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi_1}\right)}{\cos\varphi_1 \sqrt{|\Phi_1''|}} \cos\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\Phi_1 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right.$$

Wir erhalten also zwei periodische Wellenzüge, für deren Amplitude Φ_α'' und für deren Richtung Φ_α charakteristisch ist. Wegen der im Argument der cos stehenden großen Zahl $g\,\varrho/v^2$ ist die Phase dieser Wellenzüge schnell veränderlich gegen die Amplitude, in deren Ausdruck keine schnell veränderliche Größe steht. Wir gewinnen darum ein übersichtliches Bild des Wellengitters, wenn wir die Amplitude der Welle in dem Raum einer Wellenlänge als konstant ansehen. Die charakteristischen Formen erscheinen dann als Kurven gleicher Phase („isophasals") und ihre Gleichungen sind

$$\varrho\,\Phi_\alpha = \text{const.}$$

Es empfiehlt sich, nach dem Vorbild Lord Kelvins diese Kurven in rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \varrho\cos\vartheta, \quad z = \varrho\sin\vartheta$$

zu schreiben; führen wir gleichzeitig die Abkürzung $t_\alpha = \operatorname{tg}\varphi_\alpha$ ein, so werden unsere Kurven:

$$(34)\qquad \varrho\,\Phi_\alpha = \varrho\,\frac{\cos(\varphi_\alpha+\vartheta)}{\cos^2\varphi_\alpha} = (x - z\,t_\alpha)\sqrt{1+t_\alpha^2} = c,$$

wenn c einen Parameter bedeutet, der beide Kurvenscharen umfaßt, und nach (31)

$$t_\alpha = \frac{x}{4z} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{4z}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 8z^2}}{4z}.$$

Die im Ausdruck (34) auftretenden Größen haben nun alle einen einfachen geometrischen Sinn, der uns die Diskussion wesentlich erleichtert und uns zu dem bekannten durch Fig. 8 veranschaulichten Schiffswellengitter hinführt.

Die Tangentenrichtung dx/dz der Kurve $\varrho\,\Phi_\alpha = c$ erhalten wir aus (34), indem wir bilden:

$$\frac{\partial(\varrho\,\Phi_\alpha)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(\varrho\,\Phi_\alpha)}{\partial z}\,dz + \frac{\partial(\varrho\,\Phi_\alpha)}{\partial t_\alpha}\,dt_\alpha = 0.$$

Bedenken wir, daß $\partial(\varrho\, \Phi_a)/\partial t_a$ wegen des Minimum-, bzw. Maximumcharakters unserer Ausdrücke verschwindet, so erhalten wir:

$$\frac{dx}{dz} = t_a = \operatorname{ctg}\gamma\,, \tag{35}$$

wenn wir mit γ die Neigung dieser Kurven gegen die Fahrtrichtung bezeichnen.

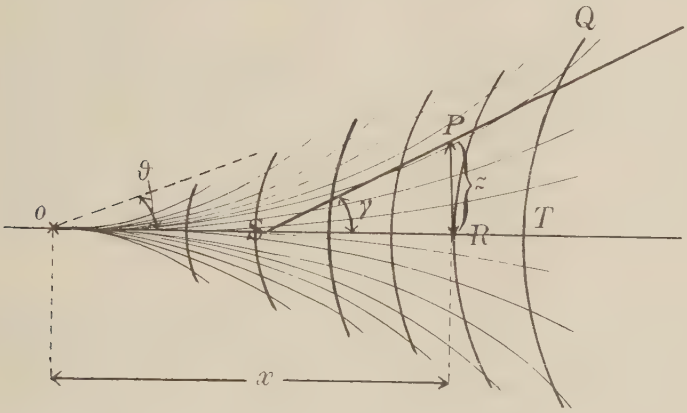


Fig. 8.

So sehen wir ohne weiteres, daß die Kurven $\varrho\, \Phi_0 = \text{const.}$ am Schiff ($x = 0$, $z = 0$) unter dem Winkel $\gamma = 0$ ansetzen, sich dann bei wachsendem x immer stärker gegen die Fahrtrichtung neigen, und bei einer Neigung von

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ also } \gamma = 54^0\,44'$$

die äußere Grenze $\vartheta = 19^0\,28'$ schneiden.

Unter dem gleichen Winkel setzen dort die Kurven $\varrho\, \Phi_1 = \text{const.}$ an, nähern sich der x-Achse mit immer größer werdender Neigung und schneiden sie senkrecht.

Wir fragen ferner nach dem Abstand der einzelnen Erhebungsmaxima voneinander, der von Punkt zu Punkt veränderlich ist. Gehen wir in der x-Richtung, d. i. in der Fahrtrichtung von einem Maximum zum anderen, so ist nach (34), wieder mit Rücksicht auf $\partial(\varrho\, \Phi_a/\partial t_a) = 0$:

$$\Delta x = \frac{\Delta c}{\sqrt{1 + t_a^{\,2}}}\,.$$

Damit sich nun das Argument der cos in Gleichung (33) um 2π ändere, muß der Parameter $c = \varrho\, \Phi_a$ um $2\pi v^2/g$ variieren. Es wird also die Entfernung eines Maximums vom anderen, parallel zur x-Achse gemessen

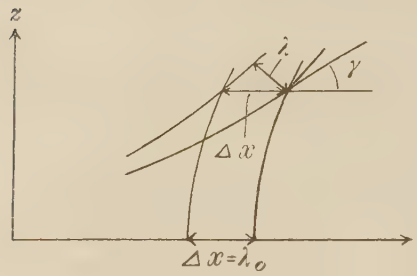


Fig. 9.

$$\Delta x = \frac{2\pi v^2}{g\sqrt{1+t_a^2}}.$$

Verstehen wir unter „Wellenlänge“ λ den Abstand zweier Maxima, in Richtung der Wellennormale gemessen, so wird auf der x-Achse, also in der Fahrtlinie des Schiffes selbst

$$\lambda_0 = \frac{2\pi v^2}{g},$$

d. i. nach dem unserer Rechnung zugrunde liegenden Dispersionsgesetz die Wellenlänge, welche sich mit Schiffsgeschwindigkeit fortpflanzt.

In jedem anderen Punkt des Wellengitters gilt, wenn wir die einzelnen Wellenzüge als ungefähr parallel ansehen

$$\lambda = \Delta x \sin\gamma;$$

berücksichtigen wir noch, daß nach (35)

$$\frac{1}{\sqrt{1+t_a^2}} = \sin\gamma,$$

so erhalten wir allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi v^2 \sin^2\gamma}{g}. \tag{36}$$

Die Wellenlänge ist in jedem Punkte so groß, als es nach dem Dispersionsgesetz der Oberflächenwellen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Richtung der Wellennormalen an jener Stelle entspricht.

Wir haben weiterhin auf die *Phasendifferenz* zwischen den beiden Wellenzügen am Rande unseres Wellengitters zu achten, die sich in den verschiedenen Vorzeichen des Summanden $\pi/4$ im Argument der cos (Gl. (33)) ausdrückt. An jedem Punkte $\Phi_0 = \Phi_1$, oder was dasselbe ist, $\varphi_0 = \varphi_1$, oder auch nach (31)

$t = 1/\sqrt{2}$ treffen sich die beiden Wellenzüge mit einer Phasendifferenz $\pi/2$; ein Knoten des einen trifft auf einen Bauch des anderen und umgekehrt.

Alle diese Konsequenzen werden von der Erfahrung durchaus bestätigt. In der Technik vereinfacht man unser allgemeines Wellengitter zu zwei Systemen ebener Wellen, die unseren $\gamma = 90^0$, also $\lambda = 2\pi v^2/g$ und einem $\gamma = 40^0 - 50^0$ entsprechen. [1])

Wir wenden uns nun der *Amplitude der Wellen* zu, die natürlich wegen des linearen Ansatzes bis auf eine multiplikative Konstante unbestimmt bleibt. Für $v = 0$ wird sie zu Null und zwar wie v^2, mit wachsender Entfernung ϱ vom Schiff nimmt ab wie $\varrho^{-1/2}$. Interessant ist noch der Vergleich der relativen sie Amplituden beider Wellenzüge.

Schreiben wir eine Kurve gleicher Phase

$$\varrho\, \Phi_a = c,$$

so gibt sie uns beide Wellenzüge und zwar die seitlichen Wellen, wenn t_a von $-\infty$ zu $1/\sqrt{2}$ sinkt, die Heckwellen, wenn t_a weiter von $1/\sqrt{2}$ zu Null variiert wird. c ist dann äquivalent mit der Strecke $O\,T$ in Fig. 8, wie man leicht sieht. Wir wollen uns nun die Amplituden auf dieser Phasenkurve als Funktion des Winkels ϑ auftragen. und berechnen zu diesem Zweck Φ_a''. Da

$$(37)\quad \Phi_a' = \left[\frac{\partial(\varrho\, \Phi_a)}{\partial t_a} \cdot \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi_a}{d\varphi}\right]_a = [t_a - \mathrm{tg}\,\vartheta(1 + 2\,t_a^2)]\,\frac{\sqrt{1 + t_a^2}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta}} = 0,$$

so wird:

$$\Phi_a'' = [(1 + 2\,t_a^2) - \mathrm{tg}\,\vartheta \,.\, t_a(5 + 6\,t_a^2)]\,\frac{\sqrt{1 + t_a^2}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta}}$$

$$= \left[\frac{3}{2} - t_a\left(2\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\right)\right]\frac{\sqrt{1 + t_a^2}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta}},$$

wenn wir mit Hilfe von (37) die höheren Potenzen von t_a aus der Klammer eliminieren.

Da aber nach (34)

$$\varrho\, \Phi_a = \varrho(1 - t_a\,\mathrm{tg}\,\vartheta)\,\frac{\sqrt{1 + t_a^2}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta}} = c,$$

---

1) Vgl. Enz. d. math. Wiss. IV. 22; Müller, Hydrodyn. d. Schiffes p. 574.

können wir schreiben:

$$\varrho\, \Phi_a'' = c\, \frac{\frac{3}{2} - t_a \left(2 \operatorname{tg} \vartheta + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \vartheta}\right)}{1 - t_a \operatorname{tg} \vartheta}. \tag{38}$$

Ferner:

$$\cos \varphi_a = \frac{1}{\sqrt{1 + t_a^2}}.$$

Zu jedem ϑ gehören zwei t_a, die den beiden auf der „isophasal" liegenden Punkten entsprechen.

Eine genaue Berechnung ist nach unseren Formeln für jeden Schiffsradius und jede Geschwindigkeit möglich, wir wollen hier aber nur den einen Fall numerisch ausrechnen, daß der Schiffsradius a klein ist gegen die Wellenlänge g/v^2. Dann ersetzen wir die Besselsche Funktion durch das erste Glied ihrer Reihe:

$$J_1 \left(\frac{g\, a}{v^2 \cos^2 \varphi}\right) = \frac{g\, a}{2\, v^2 \cos^2 \varphi}.$$

Die Tabelle an Ende dieses Paragraphen gibt Werte der Amplituden A der Seitenwellen und A' der Heckwellen als Funktion von ϑ. Fig. 10 zeigt den Grundriß, Fig. 11 den Aufriß der

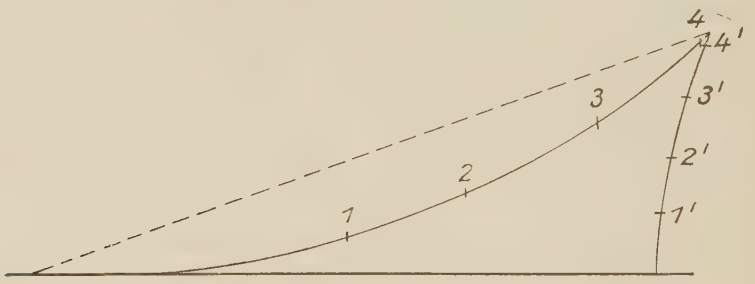


Fig. 10.

Wellen; gleiche Punkte sind durch gleiche Zahlen bezeichnet. Für $\vartheta = 0$ gibt unsere Formel $A' = 0$, aber $A = \infty$; doch müssen wir bedenken, daß $\cos \varphi$ dort $= 0$ wird und daher unsere Annäherung für die Besselsche Funktion sinnlos ist; in Wirklichkeit wird, wie man leicht sieht, auch $A = 0$ für $\vartheta = 0$. Die Seitenwellen erreichen also ein Maximum, von dem aus sie wieder zu Null herabsinken. Für $\vartheta = 19^0\, 28'$ wird $A = A' = \infty$; das ist eine Folge der Vernachlässigung qua-

dratischer Glieder. Wir sehen, wie klein der Bereich dieser Unendlichkeit ist an den für $\vartheta = 19^0$ berechneten Werten,

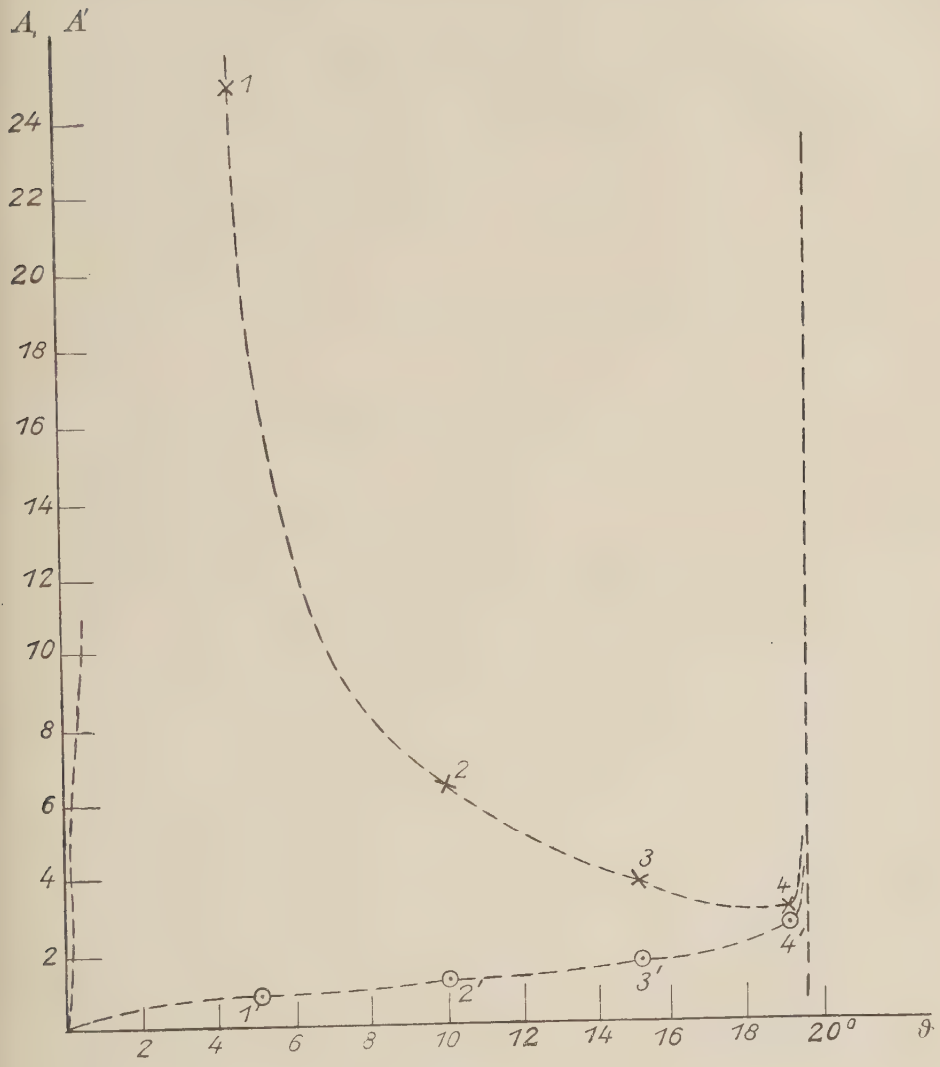


Fig. 11.

A_0 ist dort noch in der Nähe seines Minimums. A_1 ist erst auf einen relativ kleinen Wert gestiegen. Wir sehen:

1. Die Seitenwellen steigen vom Schiff aus an, erreichen ein Maximum und sinken wieder gegen den Rand des Wellengitters.

2. Die Heckwellen sind relativ klein, haben in der Mitte des Gitters ihr Minimum und wachsen gegen den Rand.

Zwei Resultate, welche die Erfahrung vollauf bestätigt:

	A	A'	
5°	24,6	0,86	Die Einheit von
10	6,3	1,1	A und A' ist
15	3,22	1,4	$= \frac{2Cv}{\sqrt{2gc}} \cdot \frac{ga}{v^2}$
19	3,14	2,4	

§ 5. Gestalt der Oberfläche auf seichtem Wasser.

Wir wollen nun den anderen Grenzfall unserer Dispersionsformel (2) zugrunde legen und

$$n = \sqrt{gh} \cdot k$$

setzen. Dazu müssen wir die Voraussetzung machen, daß kh eine kleine Zahl, also die Wellenlänge groß gegen das 2π-fache der Tiefe sein soll. Die Wellenlänge ist nun, wie wir vorbehaltlich der nachfolgenden genaueren Bestätigung aus den vorigen Betrachtungen herübernehmen dürfen, gegeben durch die Geschwindigkeit des Schiffes, und zwar so, daß die hervorstechendste Rolle diejenigen Wellen spielen, die nach unserem Dispersionsgesetz eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich oder wenig kleiner als die Schiffsgeschwindigkeit haben. Unser jetziger Grenzfall ist also nicht auf absolut seichtes Wasser beschränkt, sondern tritt bei beliebiger, endlicher Tiefe in Gültigkeit, wenn nur die Schiffsgeschwindigkeit genügend groß ist. Besonders wichtig ist diese Näherung bei Fluß- und Kanalschiffen, doch wird sie auch die Phänomene erklären, welche an Torpedobooten in der Nähe der Küste oft beobachtet und studiert wurden.

Wir kehren also zu Formel (24) zurück und beachten, daß nun nach (11)

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{gh}}{v}$$

eine Konstante ist; und zwar fordert unsere Näherung, daß $\sqrt{g\,h}$ stets $< v$, also φ immer reell wird. Die unteren Grenzen in (24), nämlich

$$k = \frac{\sqrt{g\,h}}{v\cos\vartheta}\,k \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{\sqrt{g\,h}}{v}\,k$$

sind beide gleichbedeutend mit $k = 0$, und unser Integral wird, wenn wir wieder nur U_1 und U_2 berücksichtigen:

$$(39)\quad \left| \begin{array}{l} Y = \dfrac{-C}{\sqrt{1-\frac{g\,h}{v^2}}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1(k\,a)\left\{\cos\left(k\,\varrho\cos(\varphi-\vartheta)\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \cos\left(k\,\varrho\cos(\varphi+\vartheta)\right)\right\} \text{ für } \vartheta < \frac{\pi}{2}, \end{array} \right.$$

Für $\vartheta > \pi/2$ gibt die erste Annäherung keinen Beitrag, da die obere und untere Grenze des Integrals zu $k = 0$ zusammenfallen.

Zur Ausführung dieses Integrals müssen wir die Besselsche Funktion wieder als Integral schreiben. Anstatt aber dies Integral über $e^{i\,k\,a\cos\alpha}$ von 0 bis $2\,\pi$ zu führen, — was zu Konvergenzschwierigkeiten Anlaß geben würde — bedenken wir, daß

$$\int_\pi^{2\pi} e^{i\,k\,a\cos\alpha}\,e^{i\,\alpha}\,d\alpha = -\int_0^\pi e^{i\,k\,a\cos(\alpha+\pi)}\,e^{i\,\alpha}\,d\alpha,$$

also

$$J_1(k\,a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(k\,a\cos\alpha)\,e^{i\,\alpha}\,d\alpha.$$

So wird, wenn wir zur Abkürzung $\varrho\cos(\varphi \pm \vartheta) = \varrho'$ setzen:

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1(k\,a)\cos(k\,\varrho')$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\,\alpha}\,d\alpha \int_0^\infty \frac{dk}{k}\{\sin k(a\cos\alpha+\varrho') + \sin k(a\cos\alpha-\varrho')\}.$$

Da bekanntlich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin y\,x}{y}\,dy = \pm\,\frac{\pi}{2},\ ^{1})$$

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Part. Diffgl. I. § 13.

wenn $x \gtrless 0$, verschwindet das Integral über k für alle Werte von $\cos\alpha$ zwischen $-\varrho'/a$ und $+\varrho'/a$, wird $=\pi$, wenn $\cos\alpha > +\varrho'/a$, und $=-\pi$, wenn $\cos\alpha < -\varrho'/a$.

Geht nun α von 0 bis π, so variiert $\cos\alpha$ von $+1$ bis -1, und unser Integral kann nur dann einen von 0 verschiedenen Wert erhalten, wenn auch ϱ'/a zwischen $+1$ und -1 liegt; das ist der Fall, wenn $\cos(\varphi \pm \vartheta) \leqq a/\varrho$.

Nun ist aber a/ϱ eine sehr kleine Zahl, d. h. wir betrachten das Wellenbild nur in einiger Entfernung vom Schiff. Unser Ausdruck (39) gibt also nur dann eine Störung der Wasseroberfläche wenn $\varphi \pm \vartheta$ ungefähr $=\pi/2$ ist.

Hieraus ergeben sich zwei diskrete, zur Fahrtrichtung symmetrische Winkel:

$$\pm\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

also

$$\pm\sin\vartheta = \cos\varphi = \frac{\sqrt{g\,h}}{v}, \tag{40}$$

Wir erhalten also Wellen, besser gesagt „Furchen", nur in ganz bestimmten Richtungen, welche durch die, auch das Machsche Phänomen bestimmende Gleichung, gegeben sind.

Der Gegensatz zwischen dem gewöhnlichen Schiffswellenphänomen und dem Machschen löst sich also in ganz eigenartiger Weise: Bewegt sich ein Schiff mit einer Geschwindigkeit, die klein ist gegen $\sqrt{g\,h}$, also gegen eine bestimmte Funktion der Tiefe des Wassers, so pflanzt sich nicht die ganze Erregung, welche das Schiff dem Wasser mitteilt, mit der Geschwindigkeit des Schiffes selbst fort; es entsteht ein regelmäßiges Wellengitter, das wir als Dispersionsphänomen auffassen und berechnen können. Solange das Dispersionsgesetz dasselbe bleibt, bleibt auch das Wellengitter dasselbe. Nun nimmt aber die Dispersion der Oberflächenwellen, wie unsere Formel (2) zeigt, mit zunehmender Phasengeschwindigkeit ab und verschwindet für den kritischen Wert $\sqrt{g\,h}$. Mit einer größeren Geschwindigkeit kann sich keine Störung auf der Wasserfläche fortpflanzen. Unsere Furchen, welche direkt die von dem Schiff verursachte lokale Senkung der Wasseroberfläche fortsetzen und nach rückwärts übertragen, werden also von selbst die Richtung einschlagen, in der sie sich, stationär zum

Schiff mit der Geschwindigkeit $\sqrt{g\,h}$ fortpflanzen können. Diese Richtung hat mit zunehmender Schiffsgeschwindigkeit eine immer kleinere Neigung gegen die Fahrtrichtung. Wir können also sagen: *Das Machsche Phänomen zeigt sich auch bei Oberflächenwellen, doch erst dann, wenn der sich bewegende Körper eine bestimmte, von der Tiefe abhängige Geschwindigkeit überschritten hat.*

Es erübrigt nun noch, in dem Gebiet, wo überhaupt eine Erhebung der Oberfläche eintritt, diese genauer anzugeben. Dort erhalten wir:

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} Y &= -\frac{C}{\sqrt{1-\frac{g\,h}{v^2}}}\left(\int_0^{\arccos\frac{\varrho'}{a}} e^{i\alpha}\,d\alpha - \int_{\pi-\arccos\frac{\varrho'}{a}}^{\pi} e^{i\alpha}\,d\alpha\right)\\ &= -\frac{C\,v}{\sqrt{v^2-g\,h}}\cdot\frac{1}{i}\left(e^{i\arccos\frac{\varrho'}{a}} - 1 - e^{i\pi} + e^{i\pi}\cdot e^{-\arccos\frac{\varrho'}{a}}\right)\\ &= -\frac{2\,C\,v}{\sqrt{v^2-g\,h}}\sin\left(\arccos\frac{\varrho}{a}\cos(\varphi+\vartheta)\right)\end{aligned}\right.$$

$$(42)\qquad Y = -2\,C\,v\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\varrho}{a}\cos(\varphi+\vartheta)\right)^2}{v^2-g\,h}}\,.$$

Das bedeutet eine einmalige Senkung mit dem Minimum

$$\frac{2\,C\,v}{\sqrt{v^2-g\,h}} \quad \text{für die beiden Stellen} \quad \pm\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi\,.$$

Gl. (42) gilt nur etwa bis zu den jenen beiden Stellen eng benachbarten Winkeln ϑ, für die $Y = 0$ ist; darüber hinaus haben wir nach obigem überall $Y = 0$. Mit wachsendem ϱ wird die Furchung enger.

Interessant ist, *daß die Amplitude dieser Welle für $v = \infty$ nicht ins Unendliche wächst, sondern sich asymptotisch einem Grenzwert nähert.*

§ 6. Andere Ansatzmöglichkeiten.

Beim bisherigen Ansatz unseres Integrals gingen wir von einem Anfangszustand aus, welcher die Form der Oberfläche

als eine bestimmte, unstetige Funktion der Entfernung ϱ vom Schiffsmittelpunkt gab. Wir bemerkten schon damals (§ 2), daß dies durchaus nicht die einzige Möglichkeit des Ansatzes ist, daß sich vielmehr aus unserer Theorie nicht ohne weiteres folgern läßt, ob nicht ein unstetiger Ansatz für den Druck oder für das Geschwindigkeitspotential zu Resultaten führt, die ebenso gut — oder vielleicht sogar besser — mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Es ist wohl vorauszusehen, daß die so erhaltenen Resultate nicht vom vorherigen abweichen werden, was die Wellenformen anlangt, da diese doch wesentlich vom Dispersionsgesetz bedingt sind, dagegen werden sich Abweichungen in den Amplituden zeigen, die für die Frage des Schiffswiderstandes von Bedeutung werden können. Ohne weiteres kann man einsehen, daß ein entsprechender Anfangszustand des *Druckes* überhaupt nichts anderes ergeben kann, als ein bestimmtes Anfangsdeplacement; denn, wo an der Oberfläche keine Erhebung ist, muß der Druck verschwinden. Der Druck baut sich ebenso aus $\cos n\,t$-Gliedern auf, wie die Oberflächenform.

Anders aber das *Geschwindigkeitspotential*:

Setzen wir als Lösung unserer Differentialgleichung an:

$$\varphi = C' \cos n\,t \frac{\mathfrak{Cof}\, k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\, k\,h} J_0(k\,r), \tag{43}$$

so gehört dazu eine Oberfläche:

$$y_0 = -\frac{C'\,n}{g} \sin n\,t\, J_0(k\,r).$$

Im Gegensatz zum früheren Ansatz verschwindet jetzt die Anfangserhebung, nicht aber die Anfangsgeschwindigkeit der Wasserteilchen.

Das Ringwellenpotential wird dann:

$$\Phi_0 = C'\,a \int_0^\infty dk \cos n t J_0(k r) J_1(k\,a) \frac{\mathfrak{Cof}\, k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\, k\,h}.$$

Das Schiffswellenpotential:

$$\Phi = C_1'\,a \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty dk \cos n\,t J_1(k\,a) J_0(k\,r_\tau) \frac{\mathfrak{Cof}\, k(y+h)}{\mathfrak{Cof}\, k\,h}.$$

Dazu gehört die Oberfläche:

$$(44) \qquad Y = -\frac{C_1' a}{g} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty dk \,.\, n \,.\, \sin n\tau \, J_1(k a) J_0(k r_z) \,.$$

Hierbei ist wieder zu beachten, daß C_1' von der Geschwindigkeit abhängt. Es ergibt sich, wie beim vorigen Ansatz, als sinnvollste Annahme

$$C_1' = \frac{v}{a} C' \,.$$

Weiterhin müssen wir aber bedenken, daß die Impulsgröße C' um so größer ist, je größer die Schiffsgeschwindigkeit, und daß wir darum am besten schreiben:

$$C_1' = \frac{v^2}{a} C \,.$$

Man sieht leicht, daß C wieder die Dimension einer Länge hat. Alle Betrachtungen der §§ 2 und 3 sind ohne weiteres wieder anwendbar und wir erhalten ohne Schwierigkeit, wenn wir gleich nur die erste Näherung berücksichtigen, analog Gleichung (24):

$$(45) \quad \begin{cases} Y = -\dfrac{C v}{8\pi g} \left[\displaystyle\int_{\frac{n}{v\cos\vartheta}}^{\infty} \frac{dk}{k} \cdot n J_1(k a) \,.\, U_1' + \int_{\frac{n}{v}}^{\infty} \frac{dk}{k} \cdot n \,.\, J_1(k a)\, U_2' \right] & \text{für } \vartheta < \frac{\pi}{2} \\ \text{und} \\ Y = -\dfrac{C v}{8\pi g} \displaystyle\int_{\frac{n}{v}}^{\frac{n}{v\cos(\pi-\vartheta)}} \frac{dk}{k} \cdot n \,.\, J_1(k a)\, U_2' & \text{für } \vartheta > \frac{\pi}{2} \,, \end{cases}$$

wobei U_1' und U_2' durch (27) gegeben sind.

Wir rechnen nun unsere Spezialfälle durch:

I. Setzen wir $n = \sqrt{g k}$ und wieder $k = n / v \cos\varphi$, so wird

$$\frac{dk}{k} \cdot n = \frac{2g}{v} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot d\varphi \,,$$

und wenn wir bedenken, daß die Betrachtungen über Pole zum selben Resultat führen wie früher, erhalten wir als erste Näherung

$$(46)\quad \left\{ Y = -2C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi}\right) \sin\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\frac{\cos(\varphi+\vartheta)}{\cos^2\varphi}\right) \right. \quad \text{für } \vartheta < 19^0\,28'.$$

Daraus folgt, wie früher, das Schlußresultat:

$$(47)\quad \left\{ Y = \frac{4\,C\,v}{\sqrt{2\,g\,\varrho}} \left[\frac{J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi_0}\right)}{\cos^2\varphi_0 \sqrt{|\Phi_0''|}} \sin\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\Phi_0 + \frac{\pi}{4}\right) \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{J_1\left(\frac{g\,a}{v^2\cos^2\varphi_1}\right)}{\cos^2\varphi_1 \sqrt{|\Phi_1''|}} \sin\left(\frac{g\,\varrho}{v^2}\,\Phi_1 - \frac{\pi}{4}\right) \right] .$$

Daß hier sin an Stelle des früher auftretenden cos steht, spielt keine Rolle; das bedeutet nur eine Phasenverschiebung des gesamten Wellenbildes.

Die Amplitude B der Seitenwellen wird nach Formel (47), gegenüber der früheren (33) stark erhöht, die der Heckwellen (B') dagegen kaum, wie folgende Tabelle zeigt. Nach dem jetzigen Ansatz würden also die Seitenwellen noch stärker überwiegen, wie nach dem vorigen.

	B	B'
5°	140	0,86
10	17,9	1,2
15	5,9	1,6
19	4,2	2,7

II. Auch die Wellen auf seichtem Wasser geben kein anderes Bild wie früher; wieder tritt das „Machsche Phänomen“ auf. Diesmal haben wir:

$$(48)\quad \left\{ Y = -\frac{C\,r^2}{\sqrt{r^2 - g\,h}} \sqrt{\frac{h}{g}} \int_0^{\infty} dk\, J_1(k\,a) \left\{ \sin\left(k\,\varrho\cos(\varphi+\vartheta)\right) \right. \right.$$
$$\left. \left. + \sin\left(k\,\varrho\cos(\varphi-\vartheta)\right) \right\} \quad \text{für } \vartheta < \frac{\pi}{2} .$$

Dieser Ausdruck verschwindet[1]) für

$$\frac{\varrho}{a}\cos(\varphi \pm \vartheta) > 1\,,$$

also kommen wir, wie früher, auf einen nicht verschwindenden Wert nur innerhalb eines kleinen Gebietes um

$$\pm\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi\,, \quad \text{d. h.} \quad \pm\sin\vartheta = \frac{\sqrt{g\,h}}{v}\,.$$

Dort wird — wie sich aus der zitierten Stelle bei Nielsen ergibt und wie man auf komplexem Wege leicht bestätigt —:

$$(49) \qquad Y = -\frac{C v^2}{\sqrt{v^2 - g\,h}}\sqrt{\frac{h}{g}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{\varrho}{a}\cos(\varphi \pm \vartheta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{a}\cos(\varphi \pm \vartheta)\right)^2}}\,.$$

Zum Unterschied von früher erhalten wir diesmal eine nach den Rändern der Furchen hin zunehmende Erniedrigung des Wasserniveaus, die in der Mitte verschwindet, und um so stärker ist, je kleiner das Schiff. Das scheinbare Unendlichwerden des Ausdrucks (49) ist natürlich nur eine Folge der Näherungsrechnung, die für die Ränder der Furchen versagt und hat in Wirklichkeit nur eine Vertiefung der Furchen gegenüber dem früheren Ansatz zu bedeuten. Es entspricht dies durchaus der stärkeren Ausbildung der Seitenwellen, die nach obigem bei dem jetzigen Ansatz auf tiefem Wasser eintrat. Indes ist dies seltsame Resultat wohl ein Anzeichen dafür, daß unser erster Ansatz als wirklichkeitstreuer angesehen werden muß.

§ 7. Vergleich unserer Methode mit der von Rayleigh-Kelvin.

Unsere Resultate enthalten im Grunde nichts wesentlich Neues; die Form der Wellenzüge ist seit Kelvins erster Arbeit bekannt und hat, wie eine Arbeit von Ekman[2]) über Störungen am Wassergrund zeigt, eine sehr allgemeine Gültigkeit. Die Ausdrücke für die Amplituden unterscheiden sich

1) Vgl. N. Nielsen, Zylinderfunktionen § 74, (1) und (2).

2) V. W. Ekman, Arkiv för Matem., Astr. och Fysik **3**. Nr. 2. Stockholm.

von den bisher bekannten einigermaßen, und ich glaube, wir können sie als konsequenter ansehen, wie die von früheren Autoren gegebenen. Es ist nun noch unsere Aufgabe, das zu erweisen und unsere Methode mit den bekannten zu vergleichen. Von Kelvins erster Arbeit sehen wir dabei ab; die darin angewandte Methode hatte doch selbst für den Autor noch nichts restlos Befriedigendes. Dagegen ist es interessant, die Kelvinsche Arbeit, welche auf Rayleigh aufbaut, etwas genauer anzusehen, und durch einige einfache Transformationen aufzuzeigen, was unseren Untersuchungen gleich und was davon verschieden ist.

Rayleighs[1]) Gedankengang ist in kurzem folgender: Das Problem erscheint als Randwertaufgabe auf fließendem Wasser, da es gleichgültig ist, ob das Schiff oder das Wasser bewegt wird: ein wirbellos strömender Fluß, auf seiner Oberfläche eine unendlich breite Druckstörung. Das Problem ist so vollkommen bestimmt, und liefert das anschauliche Resultat, daß — wenn wir wieder von Kapillarität absehen — hinter und nur hinter dem Schiff eine, in einiger Entfernung ganz einfach harmonische, ebene Welle herzieht, deren Länge durch die Schiffsgeschwindigkeit nach dem bekannten Dispersionsgesetz bestimmt wird. Auf solchen ebenen Wellen nun baut Kelvin nach Rayleighs Vorschlag das Wellengitter auf, das hinter einem Schiff von endlicher Breite herzieht, indem er dies auffaßt als zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl unendlich breiter Druckstörungen, die gegeneinander unter allen möglichen Winkeln zwischen 0 und π geneigt sind.

Daß diese Methode mit der unseren sehr nahe verwandt ist, sehen wir auf den ersten Blick, wenn wir an unser Resultat (p. 74) denken, wonach in jeder Richtung die, der dort herrschenden Geschwindigkeit entsprechende Wellenlänge erscheint. Durch Ausintegration erhält Kelvin auch den Grenzwinkel, die richtigen Wellenformen usw.

Offenbar ist diese Methode hauptsächlich in zwei Punkten von der unserigen verschieden:

1. In der Benutzung der Wasserbewegung anstatt der Schiffsbewegung,

1) J. W. Rayleigh, Scient. papers 2. p. 258.

2. Im Aufbau der Störung durch das begrenzte Schiff aus unendlich breiten, d. i. eindimensionalen Störungen.

Betrachten wir zunächst den ersten Punkt.

Wir wollen zeigen, daß unsere Integration über die verflossene Zeit die Relativbewegung des Schiffes gegen das Wasser in der gleichen Weise darstellt, wie die von Rayleigh eingeführte Strömung des Wassers gegen das Schiff, und nehmen dazu den einfachsten Fall des ebenen, eindimensionalen Problems vor:

Eine einmalige ebene Erniedrigung des Oberflächenniveaus um C in einem begrenzten Raum von $x = -a$ bis $x = +a$ zur Zeit $t = 0$ gibt eine ebene Welle:

$$Y_0 = -\frac{2C}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{\sin k a}{k}\cos n t\cos k x\,.$$

Das Schiffswellenintegral wird also nach unserer Methode, da

$$x_\tau = v\tau - \xi,$$

Fig. 12.

$$Y = -\frac{2Cv}{\pi a}\int_0^\infty dk\,\frac{\sin k a}{k}\int_0^\infty d\tau\cos n\tau\cos k(v\tau - \xi)\,.$$

Um dieses Integral konvergent zu machen, gehen wir ähnlich vor, wie Rayleigh, und führen eine geringe Dämpfung der Oberflächenwellen durch die innere Reibung des Wassers in Gestalt eines Faktors $e^{-\mu_1\tau}$ ein, wozu uns die Betrachtungen p. 45 berechtigen.

Schreiben wir noch bequemer:

$$\cos(v\tau - \xi) = \Re\mathrm{e}\left[e^{i(v\tau - \xi)}\right],$$

so wird:

$$Y = \Re\mathrm{e}\left[-\frac{Cv}{\pi a}\int_0^\infty\frac{dk}{k}\sin k a\,.\,e^{-ik\xi}\int_0^\infty d\tau\,e^{-\mu_1\tau}\left(e^{i(kv+n)\tau} + e^{i(kv-n)\tau}\right)\right],$$

$$Y = \Re e\left[\frac{Cv}{i\pi a}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\sin ka\,.\,e^{-ik\xi}\left\{\frac{1}{kv+n+i\mu_1}+\frac{1}{kv-n+i\mu_1}\right\}\right]$$

$$= \Re e\left[\frac{Cv}{i\pi a}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\sin ka\,.\,e^{-ik\xi}\,\frac{2kv+2i\mu_1}{(kv+i\mu_1)^2-n^2}\right].$$

Den Integrationsweg über k ziehen wir für positive ξ nach der negativen, für negative ξ nach der positiven imaginären Achse, so werden die dort erstreckten Integrale wie $1/\xi$ verschwinden. Für positive ξ — d. h. hinter dem Schiff — kommt aber noch das Residuum des Poles

$$(kv+i\mu_1)^2 = n^2$$

hinzu. Dies ergibt, wenn wir $n = \sqrt{gk}$ setzen und die kleine Größe μ_1 vernachlässigen:

$$Y = \Re e\left[-\frac{Cv}{i\pi a}\,.\,2\pi i\,.\,\frac{\sin\frac{g}{v^2}a}{\frac{g}{v^2}}\,e^{-i\frac{g}{v^2}\xi}\,.\,\frac{2}{v}\right]$$

$$= -4\,\frac{Cv^2}{ga}\sin\frac{g}{v^2}a\cos\frac{g}{v^2}\xi,$$

also einen Zug ebener Wellen von der Länge $2\pi v^2/g$ hinter dem Schiff. Setzen wir $n = \sqrt{gh}\,.\,k$, so verschwindet das Residuum und somit auch der Hauptwellenzug. Dieselben Resultate erhält Rayleigh[1]), bis auf Abweichungen in der Konstanten, die von Unterschieden in den Anfangsbedingungen herrühren. Jedenfalls zeigt sich, daß die Einführung der Schiffsbewegung auf diese und jene Weise gleich berechtigt ist.

Eine prinzipielle Verschiedenheit dagegen werden wir beim zweiten Punkte finden. Es mag für Kelvins Methode und gegen die unsere einnehmen, daß ein so einfaches und physikalisch sinnvolles Resultat, wie es die Lösung des eindimensionalen Problems darbietet, als Grundlage für das zweidimensionale Problem dient, welches dann durch eine einfache Integration über einen Drehungswinkel gelöst wird. In diesem

1) J. W. Rayleigh, Scienc. papers 2. p. 258.

Punkte ist die Kelvinsche Methode entschieden der unseren überlegen; denn wir konnten einen solchen Ruhepunkt in den formalen, mathematischen Untersuchungen nicht erreichen. Doch ist bereits von Ekman[1]) gezeigt worden, daß dieser Aufbau des zweidimensionalen Problems aus dem eindimensionalen nur mit Einschränkung als wirklichkeitstreu angesehen werden kann. Wir wollen das in einfacher Weise so zeigen, daß wir nach der Methode Kelvins[2]) die Ringwelle aus der ebenen aufbauen und das Resultat mit unserem Ausdruck vergleichen:

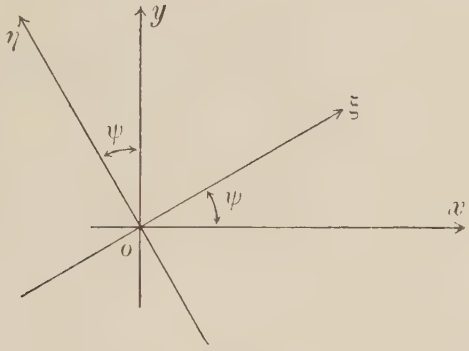


Fig. 13.

Die einfache ebene Welle ist:

$$Y = -\frac{2C}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{\sin k\,a}{k}\cos n\,t\cos k\,x\,.$$

Wir drehen nun unser Störungsgebiet um den Winkel ψ gegen das frühere. An Stelle des früheren x tritt dann

$$\begin{aligned}\xi &= x\cos\psi + y\sin\psi\\ &= r\cos(\psi - \vartheta),\end{aligned}$$

wenn wir Polarkoordinaten r und ϑ einführen. Die Integrationsgrenzen über ψ sind 0 und π, und die Ringwelle wird:

1) l. c. p. 19.
2) Lord Kelvin, Math. and phys. papers **4.** p. 407.

$$Y = -\frac{2C}{\pi}\int_0^\infty dk \frac{\sin k a}{k} \cos n t \int_0^\pi \cos\{k r \cos(\psi - \vartheta)\} \mathrm{d}\psi$$

$$= -2C\int_0^\infty dk \frac{\sin k a}{k} \cos n t J_0(k r).$$

Wir hatten:

$$Y = -Ca\int_0^\infty dk J_1(k a) \cos n t J_0(k r). \tag{3}$$

Also dem Kelvinschen $(2 \sin k a)/k$ steht unser $a J_1(k a)$ gegenüber. Durch die Drehung und Integration ging wohl die eine einfach harmonische Funktion in eine Besselsche über, nicht aber die vom endlichen Störungsgebiet herrührende. Und dies entspricht vollkommen dem augenfälligen Umstand, daß bei Kelvin schließlich die Gesamtstörung nicht, wie bei uns, auf ein gewisses Bereich konzentriert ist, sondern kontinuierlich über den ganzen Raum verteilt. Ekman hat bereits sehr richtig darauf hingewiesen, daß die weit vom Zentrum entfernten Teile der Störung beim Kelvinschen Ansatz durchaus nicht gegen die zentralen Teile vernachlässigt werden können, und daß dort die langen Wellen viel stärker gegenüber den kurzen auftreten müssen, als in Wirklichkeit; dem entspricht vollkommen, daß das Kelvinsche $\sin k a/k$ für große k, d. i. für kleine Wellen stärker verschwindet als unser $J_1(k a)$ und daß die Amplituden bei Kelvin sich von den unseren durch einen Faktor $\cos\varphi_a$ unterscheiden, der das Verhältnis der Seitenwellen zu den Heckwellen verkleinert, wie eine Vergleichung unserer obigen Ausdrücke von p. 78 und 84 für die Amplituden A und B zeigt.

Schließlich muß ich noch bekennen, daß die vorliegende Arbeit gegenüber der von Ekman in den Resultaten kaum Vorzüge aufzuweisen hat. Doch ist es wohl interessant, die Schiffswellen direkt aus Ringwellen aufzubauen, anstatt aus eindimensionalen Schiffswellen, wie es Ekman, nur exakter als Kelvin, tut. Außerdem mag auch die größere, durch reichliche Anwendung komplexer Integration erreichte, mathematische Eleganz der vorliegenden Arbeit einige Berechtigung geben.

Und schließlich ist auch die Abhängigkeit der Amplitude von der Geschwindigkeit bei uns mit größerer Sorgfalt behandelt als bei Ekman. Darum werden wohl die hier erhaltenen Formeln die brauchbarsten sein bei Behandlung des wichtigsten Problems auf diesem Gebiete, des Schiffswiderstandes (genauer gesagt: desjenigen Teiles des Schiffswiderstandes, der von der Wellenbildung herrührt). Inwieweit eine Behandlung dieses Problems mit den Mitteln der wirbellosen Hydrodynamik praktisch brauchbare Resultate liefern kann, steht freilich noch dahin, doch ist es jedenfalls wichtig, die Grenzen dieser Theorie festzustellen, und ich hoffe, das in einer bald folgenden weiteren Arbeit erledigen zu können.

Lebenslauf.

Ich bin geboren zu Nürnberg am 23. Oktober 1884 als Sohn des Großkaufmanns und Magistratsrats Hans Hopf, und empfing meine Schulbildung dortselbst am Neuen humanistischen Gymnasium, das ich 1902 absolvierte. Zunächst widmete ich mich einige Semester dem Studium der Philosophie, dann wandte ich mich den Naturwissenschaften zu, hörte an den Universitäten München, Berlin und Paris Vorlesungen über Physik, Mathematik und Chemie, und besuchte das physikalische und chemische Praktikum.

Seit dem Wintersemester 1906/7 bin ich Schüler von Hrn. Prof. Sommerfeld, der mir erst durch seine gehaltvollen Vorlesungen, dann noch mehr durch Anleitung zu selbständiger Arbeit, den Weg zum Verständnis physikalischer Probleme geebnet hat. Es ist mir ein Bedürfnis, ihm an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und für das stete und rege Interesse, das er all meinen Studien entgegenbrachte, meinen tiefgefühlten Dank auszusprechen. Ich will aber auch nicht vergessen, seinem Assistenten, Hrn. Dr. Debye, herzlich zu danken für die freundliche Bereitwilligkeit, mit der er mir manche Schwierigkeiten überwinden half.